

RP I 2017, seria IX

1. X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na $[0, \pi]$. Oblicz: $\text{Var}(Y \sin X)$.
2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład ze średnią 0 i wariancją 1. Wykaż, że

$$\mathbb{P}(|X_1| + |X_2| + \dots + |X_n| \geq 2n) \leq \frac{1}{n}.$$

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ mają taki sam rozkład o skończonej wariancji i są nieskorelowane. Pokaż, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \mathbb{E}X_1 \right| \geq \epsilon \right) = 0.$$

4. Niech X będzie dowolną zmienną losową. Zmienne X_n są zdefiniowane w sposób następujący:

$$X_n = X \cdot \mathbf{1}_{\{X > n\}} + \frac{1}{n}.$$

Wykaż, że ciąg zmiennych losowych X_n jest zbieżny według prawdopodobieństwa i prawie na pewno.

5. X_n jest ciągiem zmiennych losowych o następujących rozkładach:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}$$

(nie zakładamy, że te zmienne losowe są niezależne). X jest pewną inną zmienną losową. Rozpatrujemy zmienne $Y_n = X \cdot X_n$. Czy ciąg (Y_n) jest zbieżny według prawdopodobieństwa? Czy jest zbieżny prawie na pewno?

6. Zmienne losowe (X_n) , (Y_n) , X, Y są określone na wspólnej przestrzeni probabilistycznej, przy czym $X_n \rightarrow X$ w.p., $Y_n \rightarrow Y$ w.p., gdy $n \rightarrow \infty$. Pokazać, że $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$ w.p. oraz $X_n Y_n \rightarrow XY$ w.p., a jeżeli $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$, to również $\frac{X_n}{Y_n} \rightarrow \frac{X}{Y}$ w.p.

7. Pokaż, że w dyskretnej przestrzeni probabilistycznej zbieżność w.p. oraz p.n. są równoważne.

8. Podaj przykłady na to, że:

- (a) ze zbieżności p.n. nie wynika zbieżność w L^1 ,
(b) ze zbieżności w L^1 nie wynika zbieżność p.n.

(c) Podaj przykład ciągu zbieżnego według prawdopodobieństwa, który nie jest zbieżny ani p.n., ani w L^1 .

9. Zmienne losowe ϵ_i są i.i.d., $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \dots$. Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n}{n^2} = 0 \text{ p.n.}$$

10. Zmienne losowe X_n są i.i.d., o rozkładzie jednostajnym na $(-1, 1)$. Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_1 X_2 \dots X_n = 0 \text{ p.n.}$$

11. Zmienne losowe X_n są i.i.d., o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Niech $\xi_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, $\eta_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Wykaż, że $\xi_n \rightarrow \infty$ p.n., $\eta_n \rightarrow 0$ p.n., gdy $n \rightarrow \infty$. Czy zachodzi $\mathbb{E}\xi_n \rightarrow \infty$? Czy zachodzi $\mathbb{E}\eta_n \rightarrow 0$? Czy ciągi te są zbieżne w L^1 ?

12. $X_1, X_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych i t.ż. $\mathbb{E}X_i^4 < \infty$. Używając lematu Borela-Cantelli pokaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mathbb{E}X_1 \text{ p.n.,}$$

czyli, że do ciągu X_n stosuje się mocne prawo wielkich liczb.

13. Zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ są niezależne, $\mathbb{P}(A_k) = p_k$. Niech $N_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{A_k\}}$. Wykaż, że

$$\frac{N_n}{n} - \frac{(p_1 + \dots + p_n)}{n} \rightarrow 0$$

według prawdopodobieństwa.

14. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, o tym samym rozkładzie dwupunktowym $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. Pokaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_n$ jest zbieżny prawie na pewno i wyznacz rozkład graniczny.

15. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, przy czym $\mathbb{P}(X_n = n^3) = \mathbb{P}(X_n = -n^3) = \frac{1}{2n^2}$, $\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{2^n}) = \mathbb{P}(X_n = -\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny prawie na pewno? Czy jest zbieżny w L^2 ?

16. Udowodnij, że dla ciągu nieujemnych, niezależnych zmiennych losowych X_n szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny prawie na pewno wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \frac{X_n}{1+X_n} < \infty$.