

RP I 2017, seria VIII

1. W schemacie Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym p ($p \in (0, 1)$) niech X oznacza czas oczekiwania na I sukces, zaś Y – długość pierwszej serii sukcesów. Wyznacz rozkład łączny zmiennych X, Y (czyli rozkład pary (X, Y) , traktowanej jako zmienna losowa o wartościach w $\mathbb{R}^2$) oraz rozstrzygnij, czy są to zmienne losowe niezależne.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$g(x, y) = C(x + y)e^{-x} \mathbf{1}_{\{(x, y): 0 < y < x\}}.$$

- Wyznacz stałą C .
- Oblicz $\mathbb{P}[1 \leq X < 2, Y < 1]$.
- Wyznacz rozkłady brzegowe (czyli rozkłady zmiennych losowych X, Y). Czy te zmienne losowe są niezależne?
- Wyznacz kowariancję zmiennych losowych X i Y .

3. Zmienne losowe $X, Y, \epsilon_1, \epsilon_2$ są niezależne, X i Y mają rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}(\epsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_i = 2) = \frac{1}{2}$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $\xi = \epsilon_1 X + \epsilon_2 Y$.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne o wspólnym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Wyznacz: a) $\mathbb{P}(X < Y)$, b) $\mathbb{P}(X < 2Y)$.

5. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach bezatomowych. Oblicz $\mathbb{P}[X = Y]$.

6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny (a) na kole $B(0, 1)$, (b) na kwadracie $[-1, 1]^2$. W obu przypadkach proszę wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych X, Y (czyli rozkłady brzegowe) i odpowiedzieć na pytanie, czy zmienne X i Y to zmienne losowe niezależne. Ile wynosi kowariancja tych zmiennych losowych?

7. Proszę podać przykład zmiennych losowych X, Y posiadających gęstości i takich, że ich rozkład łączny gęstości nie posiada.

8. Zmienne losowe ξ i η są niezależne, ξ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$, a η – rozkład Poissona z parametrem $\mu > 0$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $X = \xi + \eta$.

9. Zmienne losowe ξ_1, ξ_2 są niezależne, każda z nich ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$. Wyznacz rozkład zmiennej $X = \xi_1 + \xi_2$.

10. Zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ są niezależne i jednakowo rozłożone, o wspólnej dystrybucji F . Wyznacz rozkłady zmiennych losowych:

$$\xi = \max(X_1, \dots, X_n), \quad \eta = \min(X_1, \dots, X_n).$$

11. Zmienne losowe X i Y są niezależne i każda z nich ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznacz rozkłady zmiennych losowych: $\eta = X^2 + Y^2$, $\xi = \frac{X}{Y}$.

12. Niech ϕ_1, ϕ_2 będą dwuwymiarowymi gęstościami normalnymi o jednostkowych wariancjach i różnych współczynnikach korelacji. Połóżmy $\psi = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$. Pokaż, że ψ nie jest gęstością normalną, ale jej gęstości brzegowe są normalne. Z jakimi parametrami? Wyznaczyć ich współczynnik korelacji. (*Zadanie to pokazuje, że normalne gęstości brzegowe nie muszą dawać normalnego rozkładu łącznego.*)