

RP I 2017, seria VII

1. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję dla rozkładów:

- (a) Poissona z parametrem λ ,
- (b) dwumianowego $B(n, p)$,
- (c) geometrycznego $\text{Geom}(p)$,
- (d) wykładniczego $\text{Exp}(\lambda)$,
- (e) normalnego $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$. Niech Y będzie dane przez $Y = \min(X, 1 - X)$. Znaleźć: (a) $\mathbb{E}Y$, (b) $\mathbb{E}\frac{Y}{1-Y}$, (c) $\mathbb{E}\frac{1-Y}{Y}$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$.

- (a) Wyznaczyć $\mathbb{E}|X|^n$, dla $n = 1, 2, \dots$
- (b) Dla jakich $\lambda \in \mathbb{R}$ istnieje: $\mathbb{E}e^{\lambda X}$, $\mathbb{E}e^{\lambda X^2}$. Obliczyć te wartości oczekiwane dla tych wartości λ , dla których są one skończone.

4. Zmienna losowa G ma rozkład $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Dla jakich $\lambda \in \mathbb{R}$ zmienna losowa $e^{\lambda G^2}$ ma skończoną wartość oczekiwaną? Wyliczyć ją.

5. Rzucamy symetryczną kostką tak długo, aż wypadną wszystkie wyniki. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

6. W zadaniu o roztargnionej sekretarce wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby listów, które trafią do adresatów.

7. Przypuśćmy, że X jest zmienną losową nieujemną, natomiast $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ funkcją różniczkowalną i taką, że $N(0) = 0$. Wykazać, że

$$\mathbb{E}N(X) = \int_0^\infty N'(t)\mathbb{P}(X > t) dt.$$

Jak będzie wyglądać analogiczny wzór bez założenia $N(0) = 0$?

7(a). Wywnioskować stąd, że dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej zachodzi

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F(t)) dt.$$

8. Zmienna losowa X posiada skończony p -ty moment. Wykazać, że dla $0 < r \leq p$ zachodzi $\lim_{t \rightarrow \infty} t^r \mathbb{P}(|X| > t) = 0$.

9. (a) Wykazać, że dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej X zachodzi

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq k) \leq \mathbb{E}X \leq 1 + \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq k).$$

(b) Pokazać, że dla zmiennej losowej przyjmującej wartości w zbiorze $\{0, 1, 2, \dots\}$ zachodzi

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k).$$

10. X jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej 2^X .