

RP I 2017, seria VI

1. Niech ξ będzie zmienną losową o gęstości symetrycznej, tj. $f_\xi(-x) = f_\xi(x)$, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Dowieść, że dla dowolnego $a > 0$ mamy: a) $F_\xi(0) = 1/2$; b) $F_\xi(a) = 1 - F_\xi(-a)$; c) $\mathbb{P}[|\xi| < a] = 2F_\xi(a) - 1$; d) $\mathbb{P}[|\xi| \geq a] = 2F_\xi(-a)$.

2. Zmienna losowa ξ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$. Znaleźć rozkłady zmiennych losowych:

a) $2\xi - 1$, b) $\sqrt{\xi}$, c) $\min(\xi, \xi^2)$, d) $\min(\xi, 2)$, e) $\max(|\xi - 3|, 2\xi + 1)$.

3. Wykaż, że rozkład wykładniczy ma własność braku pamięci (tzn. jeżeli ξ ma rozkład wykładniczy, to dla dowolnych $s, t > 0$ mamy $\mathbb{P}(\xi > s + t | \xi > s) = \mathbb{P}(\xi > t)$). Pokaż, że rozkład wykładniczy jest jedynym rozkładem ciągłym - tzn. o dystrybuancie ciągłej - skoncentrowanym na $[0, \infty)$, o tej własności.

4. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.

- a) Wyznaczyć rozkłady zmiennych $[X]$ oraz $\{X\}$.
b) Czy zmienne te są niezależne?

5. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(a, \sigma)$. Niech $Y = f(X)$. Jakie musi być f , by Y miało standardowy rozkład normalny?

6. ξ ma rozkład $\mathcal{N}(2, 4)$. Zapisać prawdopodobieństwa: a) $P[0 \leq \xi < 3]$, b) $P[|\xi| \leq 1]$, c) $P[-1 \leq \xi \leq 1 | 0 < \xi < 3]$ za pomocą dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego, $\Phi(t)$.

7. (do domu?) Z.l. ξ ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykazać, że dla każdego $x > 0$

$$\frac{x}{1+x^2} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2) \leq \sqrt{2\pi}P[\xi > x] \leq \frac{1}{x} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2).$$

8. Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego: rozkład o gęstości $g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Y = \frac{1}{X}$.

9. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o ciągłych rozkładach. Wyznacz $\mathbb{P}(X = Y)$.