

RP I 2017, seria V

1. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w nieskończonym ciągu rzutów monetą kiedyś wypadnie 100 orłów pod rząd?

2. Liczby $a_1, a_2, \dots$ losujemy z odcinka $[a, b]$ zgodnie z rozkładem jednostajnym i niezależnie od siebie. Niech (a_1, b_1) będzie dowolnym odcinkiem zawartym w (a, b) . Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 w odcinku tym znajdzie się któryś z wylosowanych punktów.

3. Wykonujemy rzuty niesymetryczną monetą, prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p . Niech A_n będzie zdarzeniem polegającym na tym, że do chwili n wypadło tyle samo orłów, co reszek. Wykaż, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi tylko skończenie wiele zdarzeń A_n .

4. W ciągu prób Bernoulliego niech B_n będzie zdarzeniem, że seria n kolejnych sukcesów zachodzi między próbami o numerach 2^n i 2^{n+1} . Udowodnić, że jeżeli $p \geq \frac{1}{2}$, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń B_n . Jeżeli $p < \frac{1}{2}$, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi tylko skończenie wiele zdarzeń B_n .

5. Mamy nieskończenie wiele kartek ponumerowanych $1, 2, \dots$. W chwili n ($n = 1, 2, \dots$) wybieramy pomiędzy: liczbą n^2 (z prawdopodobieństwem $1/n^2$) albo liczbą $1/n^2$ (z prawdopodobieństwem $1 - \frac{1}{n^2}$). Poszczególne wybory są niezależne. Wylosowaną liczbę zapisujemy na n -tej kartce. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma liczb zapisanych na wszystkich kartkach jest skończona?

6. Na przestrzeni probabilistycznej $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, $\mathbb{P} = |\cdot|$ określamy: $X(\omega) = \omega(1 - \omega)$, $Y(\omega) = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]}(\omega)$.

(a) Wykaż, że X i Y są zmiennymi losowymi.

(b) Wyznacz σ -ciała $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$.

(c) Czy zmienna losowa Y jest $\sigma(X)$ mierzalna? A odwrotnie?

(d) Wyznacz dystrybucję zmiennej losowej X .

(e) Podaj przykład zmiennej losowej Z określonej na tej samej przestrzeni probabilistycznej, o takiej samej dystrybucji jak X (a więc o takim samym rozkładzie jak X), dla której $\sigma(Z) = \mathcal{B}([0, 1])$.

7. $X_1, X_2, \dots, X_n$ są rzeczywistymi zmiennymi losowymi, $Y_k = X_1 + \dots + X_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Wykaż, że $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

8. W urnie znajduje się N kul ponumerowanych $1, \dots, N$. Losujemy

(a) bez zwracania,

(b) ze zwracaniem

próbę o liczności n . Oznaczmy przez η największy spośród numerów kul w tej próbie, a przez ξ – najmniejszy spośród wylosowanych numerów kul. Znaleźć rozkłady zmiennych losowych η i ξ .

9. Patyk długości 1 metra łamiemy w losowym punkcie, a uzyskane krótsze patyki traktujemy jako dwa z boków prostokąta (tzn. dokładamy jeszcze dwa patyki o takich samych długościach). Niech R oznacza pole tego prostokąta. Wyznacz rozkład zmiennej losowej R (czyli jej dystrybucję).

10. Biały i żółty motyl złożyły niezależnie od siebie pewną ilość jajeczek. Liczba jajeczek złożonych przez białego motyla ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$, a przez żółtego motyla - rozkład Poissona z parametrem $\mu > 0$ (*nie zakładamy, że $\lambda = \mu$*).

(a) Jaki rozkład ma łączna liczba jajeczek złożonych przez oba motyle?

(b) Wiadomo, że motyle złożyły łącznie n jajeczek, $n \geq 0$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że żółty motyl złożył dokładnie k jajeczek, $k = 0, 1, \dots$?

11. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < -3, \\ 1/4 & \text{dla } -3 \leq t < 2, \\ 2/3 & \text{dla } 2 \leq t < 3, \\ 1 & \text{dla } t \geq 3. \end{cases}$$

Wyznacz: $P[X < -3]$, $P[X \in (-2, 2)]$, $P[X \leq 3]$, $P[X \geq 1]$.

12. Skonstruuj taki rozkład prawdopodobieństwa μ , którego dystrybuanta posiada skok (równoważnie: rozkład posiada atom) wewnątrz każdego odcinka $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

13. Niech T oznacza czas oczekiwania na I sukces w schemacie Bernoulliego z parametrem $p \in (0, 1)$ (zmienna o rozkładzie *geometrycznym*).

(a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej T .

(b) Pokaż, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{Z}_+$ mamy $\mathbb{P}(T > m + n | T > m) = \mathbb{P}(T > n)$.

14. Rzeczywista zmienna losowa X ma tę własność, że X i X^2 są jednakowo rozłożone. Pokaż, że X może przyjmować tylko wartości 0 lub 1 (tzn. $\mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = 1$).

15. Niech $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją, spełniającą własności dystrybuanty (niemalejąca, prawostronnie ciągła, $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$). Definiujemy funkcję $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ za pomocą wzoru: $X(s) = \sup\{u \in \mathbb{R} : F(u) < s\}$. Pokazać, że dla X , traktowanej jako zmienna losowa na przestrzeni probabilistycznej $([0, 1], \mathcal{B}(0, 1), |\cdot|)$, zachodzi $F_X = F$.

16. Niech X będzie dowolną zmienną losową, a F_X – jej dystrybuantą. Wyznaczyć rozkład (dystrybuantę) zmiennej losowej $F_X(X)$.