

RP I 2017, seria IV

1. W populacji jest 90% “normalnych” kierowców i 10% piratów drogowych. Prawdopodobieństwo tego, że normalny kierowca będzie miał wypadek w ciągu roku wynosi $1/1000$, natomiast analogiczne prawdopodobieństwo dla pirata drogowego to $1/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kierowca który miał wypadek w roku 2016 będzie miał wypadek też w roku 2017?

2. [zadanie o ruinie gracza, wersja symetryczna] Gracz A ma początkowo a złotych, a gracz B – b złotych, $a, b > 0$. Rzucają po kolei symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, to gracz A dostaje 1 zł od gracza B , a jeżeli reszka – gracz A daje 1 zł graczowi B . Gra kończy się, gdy któryś z graczy zostanie bez pieniędzy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że A wygra?

3. Graczowi w kasynie zostało 10\$, a taksówka do domu kosztuje 20\$. Gracz ocenia, że najwyższe prawdopodobieństwo wygranej jest przy obstawianiu „koloru” w ruletce – w pojedynczej turze wynosi ono $18/37$. Która strategia daje większe szanse wygrania brakujących 10\$:

- (a) postawienie od razu 10\$ na “czerwone”;
- (b) ostrożne stawianie po 1\$ i czekanie na ugranie 10\$?

4. Zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) są niezależne i mają to samo prawdopodobieństwo p . Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że: a) nie zajdzie żadne z nich, b) zajdą wszystkie z nich, c) zajdą dokładnie dwa z nich.

5. W urnie jest n ponumerowanych kul. Losujemy po kolei wszystkie kule (a więc losujemy n razy). Niech zdarzenie A_k polega na tym, że numer na k -tej wylosowanej kuli jest większy niż numer na wszystkich kulach wylosowanych poprzednio.

- a) Pokazać, że $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$;
- b) Wykazać, że $A_2, \dots, A_n$ są zdarzeniami niezależnymi.

6. Rzucamy 50 symetrycznymi monetami. Niech A_i będzie zdarzeniem polegającym na tym, że na i -tej monecie wypadł orzeł, $i = 1, 2, \dots, 50$; natomiast A_{51} – że wypadła parzysta liczba orłów. Wykaż, że dowolne 50 zdarzeń spośród $A_1, \dots, A_{51}$ jest niezależnych. Czy zdarzenia $A_1, \dots, A_{51}$ są niezależne?

7. W partii towaru jest 3% wadliwych detali. Przy kontroli jakości partia towaru jest sprawdzana dziesiątkami. Jeżeli w dziesiątce są 2 braki lub więcej, to cała partia jest odrzucana, w przeciwnym przypadku całą partię przesyła się dalej. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z wyprodukowanych 1000 detali co najmniej 950 zostanie przekazane dalej?

8. Na egzaminie z rachunku prawdopodobieństwa są 3 zadania. Zalicza zrobienie co najmniej 2 zadań, natomiast jeżeli student zrobi tylko jedno zadanie, to dostaje pytanie dodatkowe z teorii. Ania umie zrobić 60% zadań, ale zna odpowiedź tylko na 20% pytań z teorii, natomiast Basia i Bartek uczyli się razem, umieją odpowiedzieć na 70% pytań teoretycznych, i znają rozwiązania 30% zadań.

- (a) Która strategia jest lepsza, tzn. daje większe szanse zdania egzaminu?
- (b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie 1 student zda egzamin?
- (c) Jeżeli wiadomo, że dokładnie 1 student zdał egzamin, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że była to Ania?

9. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że r -ty sukces nastąpi dokładnie w $(k + r)$ -tym doświadczeniu, $k = 0, 1, \dots$?

10. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu równym p będzie parzysta liczba sukcesów?

11. Jakie jest prawdopodobieństwo p_n tego, że w n próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu równym $1/2$ liczba sukcesów będzie podzielna przez 3? Znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

12. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w ciągu doświadczeń Bernoulliego a sukcesów nastąpi przed b porażkami (niekoniecznie po kolei)?

13. [zadanie Banacha o zapalczach] Pewien palacz ma 2 pudełka po n zapalczek, po jednym w każdej kieszeni. Gdy chce zapalić papierosa, wyjmie losowe pudełko i z niego zapalczkę, a potem pudełko odkłada na miejsce.

- a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w momencie, gdy zapala ostatnią zapalczkę z pewnego pudełka, w drugim będzie dokładnie k zapalczek, $k = 0, 1, \dots, n$?
- b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pudełko, które opróżni się jako pierwsze, zostanie odkryte jako puste?