

RP I 2017, seria II

1. Rzucamy 1 raz 5 kośćmi do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uzyskaliśmy:

- a) piątkę (pięć razy to samo);
- b) czwórkę (cztery razy to samo, raz co innego);
- c) fulla (trójkę i parę);
- d) trójkę;
- e) dwie pary;
- f) jedną parę?

2. Grupa $2N$ mężczyzn i $2N$ kobiet dzieli się losowo na 2 równe grupy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w każdej z nich będzie tyle samo kobiet, co mężczyzn?

3. W urnie jest b kul białych i c kul czarnych, $b + c = n$. Losujemy bez zwracania k kul ($k \leq n$). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowaliśmy dokładnie m kul białych, $0 \leq m \leq b \wedge k$?

4. Na ile sposobów można rozdać 52 karty 4 osobom (każdej po 13) tak, by:

- a) każda osoba miała asa;
- b) każda osoba miała co najmniej jednego kiera?

5. Spośród liczb $1, 2, \dots, N$ wybieramy losowo n liczb ($n \leq N$) i ustawiamy w ciąg rosnący $(a_1, \dots, a_n)$. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że $a_1 \leq M$, gdzie M – ustalona liczba naturalna, oraz $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a_1 \leq M)$.

6. $A_1, A_2, \dots$ jest ciągiem zdarzeń w Ω . Granicę górną (dolną) tego ciągu zdarzeń, $\limsup A_n$ ($\liminf A_n$) definiujemy jako zbiór tych $\omega \in \Omega$, które należą do nieskończenie wielu spośród A_n (należą do wszystkich zbiorów A_n począwszy od pewnego miejsca).

- a) Wyrazić $\limsup A_n$ i $\liminf A_n$ wzorami.
- b) Pokazać, że: $(\limsup A_n)' = \liminf (A_n')$;
 $(\liminf A_n) = \limsup A_n'$;
 $\limsup (A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$,
 $\limsup A_n \cap \limsup B_n \subset \limsup (A_n \cap B_n)$.

7. A i B są zdarzeniami takimi, że: $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,5$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,1$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = 2\mathbb{P}(B \setminus A)$. Wyznacz $\mathbb{P}(A)$ i $\mathbb{P}(B)$.

8. Czy odcinek otwarty (domknięty) jest podzbiorem borelowskim płaszczyzny?

- 9. (a) Wypisać, jak wygląda σ -ciało generowane przez dwa (trzy) zbiory.
- (b) Uogólnić zadanie na przypadek n zbiorów.

10. Patyk łamiemy losowo na 3 kawałki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych kawałków da się zbudować trójkąt?

11. [zadanie o spotkaniu] Adam i Bolek umówili się na spotkanie między godziną 11 a 12 w południe. Każdy z nich przychodzi w losowym momencie; ten który przyjdzie pierwszy czeka 10 minut a potem odchodzi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że się spotkają?

12. Nieskończona płaszczyzna została poliniowana prostymi równoległymi odległymi o R . Na tę płaszczyznę rzucamy igłę o długości r , $0 < r < R$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie którąś z prostych?

13. [paradoks Bertranda] W okręgu poprowadzono losowo cięciwę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jest ona krótsza od boku trójkąta równobocznego, wpisanego w ten okrąg?

14. Talia kart składa się z s serii (kolorów), a każda z serii – z n kart ponumerowanych $1, 2, \dots, n$. Losujemy bez zwracania r kart, przy czym $k > s$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każdy kolor będzie reprezentowany?

15. [zadanie o sekretarce] Roztargniona sekretarka napisała n listów i zaadresowała n kopert, po czym umieściła losowo listy w kopertach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej jedna osoba dostanie list adresowany do siebie?

16. [zadanie o głosowaniu] W wyborach startowało dwóch kandydatów: A i B . Na A oddano a głosów, na B – b głosów, $a > b$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w trakcie liczenia głosów A cały czas prowadził? Że B nigdy nie prowadził?

17. Gracze A , B i C grają ze sobą na następujących zasadach. W I kolejce grają A i B , C pauzuje. W II kolejce C gra ze zwycięzcą I kolejki, w III kolejce – zwycięzca II kolejki z tym, który pauzował w II, i tak dalej. Całą rozgrywkę wygrywa ten, który pierwszy wygrał dwie kolejki pod rząd. Wyznaczyć prawdopodobieństwa wygranej dla każdego z graczy.