

RP I 2016/17, seria XII
Warunkowa wartość oczekiwana

1. Zmienne losowe X_1 oraz X_2 są niezależne i mają jednakowy rozkład geometryczny: $\mathbb{P}(X_i = k) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Pokazać, że rozkład warunkowy X_1 przy danym $X_1 + X_2$ jest jednostajny, tzn.

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{1}{n+1}.$$

2. ξ jest zmienną losową całkowalną. Wyznaczyć $E(\xi | \mathcal{F})$, jeśli $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A'\}$, gdzie A jest ustalonym zdarzeniem takim, że $0 < P(A) < 1$. Jaki będzie wynik, jeżeli $\xi = \mathbf{1}_B$, B – inne ustalone zdarzenie?

3. X ma rozkład jednostajny na $(0, 5)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X | [X])$.

4. Zmienne losowe r_1, r_2, r_3 są niezależne o rozkładzie Bernoulliego: $\mathbb{P}(r_i = 1) = \mathbb{P}(r_i = -1) = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(r_1 | (r_1 + r_2 + r_3))$ oraz $\mathbb{E}(r_1 r_2 | r_1 + r_2 r_3)$.

5. Zmienne losowe X i Y są niezależne, jednakowo rozłożone, całkowalne. Wykaż, że $\mathbb{E}(X | X + Y) = \mathbb{E}(Y | X + Y)$ p.n., a w konsekwencji $\mathbb{E}(X | X + Y) = \frac{1}{2}(X + Y)$ p.n. Uoglnić to zadanie na przypadek n zmiennych losowych, które są iid.

6. ξ_1, ξ_2 – niezależne, o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Wyznaczyć:

- a) $\mathbb{E}(\xi_1 | \xi_1 + \xi_2)$,
- b) $\mathbb{E}(\xi_1 - \xi_2 | \xi_1 + \xi_2)$,
- c) $\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 | \xi_1 - \xi_2)$.

7. Rzucamy kostką aż do momentu uzyskania pierwszej szóstki. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby wyrzuconych wcześniej jedynek oraz wartość oczekiwaną sumy oczek.

8. Rozpatrzmy schemat Bernoulliego: n prób, prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu równe p . Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszym rzucie jeżeli wiemy, ile sukcesów zaszło w całej serii?

9. W schemacie urnowym Polya niech X_n oznacza proporcję kul białych do ilości wszystkich kul w urnie po n tym losowaniu. (Przypomnienie: schemat Polya polega na tym, że z urny, w której jest na początku b kul białych i c kul czarnych losujemy jedną i zwracamy do urny, dokładając jeszcze l kul tego samego koloru, co kula wylosowana. Losowanie i dokładanie powtarzamy.)

(a) Wyznaczyć $E(X_{n+1} | X_n)$.

(b) Przez b_n oznaczamy prawdopodobieństwo wyciągnięcia białej kuli w n -tym losowaniu. Używając bieżących metod (własności warunkowej wartości oczekiwanej) pokazać, że b_n nie zależy od n i że $b_n = \frac{b}{b+c}$.

10. Zmienne losowe X i Y są niezależne, X ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$ a Y – rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X^Y)$.

12. Zmienna losowa X ma rozkład $\exp(1)$. Jeżeli $X = x$, to Y ma rozkład wykładniczy z parametrem x . Wyznaczyć rozkład Y oraz obliczyć $\mathbb{P}(X > r|Y)$.

13. $p\%$ monet w woreczku to monety fałszywe: mają orły po obu stronach. Losujemy ze zwracaniem n monet i każdą z nich wykonujemy 1 rzut. Niech F – liczba losowań, w których wylosowaliśmy fałszywą monetę, O – liczba orłów. Wykazać, że $\mathbb{E}(F|O) = \frac{2p}{100+p} O$.