

RP I 2017, seria XI

1. Przy pomocy twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a podać, jak znaleźć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa wypadnięcia ponad 60 reszek przy 100 rzutach symetryczną monetą.

2. Rzucamy 2000 razy nieprawidłową monetą, dla której prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $3/4$. Jakie jest (przybliżone) prawdopodobieństwo tego, że liczba wyrzuconych orłów S spełnia $1465 < S < 1535$?

3. Prawdopodobieństwo przyjścia na świat chłopca wynosi $0,512$. Za pomocą przybliżenia rozkładem normalnym oszacować prawdopodobieństwo tego, że wśród 10000 noworodków będzie:

- (a) nie mniej dziewczynek niż chłopców;
- (b) o co najmniej 200 chłopców więcej, niż dziewczynek.

4. W pewnym mieście są 3 kina i 1500 potencjalnych widzów. Każdy z widzów, niezależnie od pozostałych, wybiera jedno z kin i idzie do niego na film. Jeżeli okaże się, że nie ma biletów, to wraca do domu. Ile miejsc powinno być w I kinie, żeby z prawdopodobieństwem co najmniej $0,95$ wszyscy chętni na seans w tym kinie dostali bilet?

5. Za pomocą dystrybucji rozkładu normalnego oszacować, ile doświadczeń należy wykonać, aby z prawdopodobieństwem co najmniej $0,95$ można było stwierdzić, że częstość występowania interesującego nas zdarzenia będzie się odchyłać od prawdopodobieństwa, równego $0,3$, nie więcej niż $0,05$?

6. Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób, które umieją obsługiwać komputer. Wiadomo, że jest to ponad 90% populacji. Błąd przybliżenia ma być mniejszy niż $0,01$ z prawdopodobieństwem $0,9$ lub większym. Ile osób musi liczyć ta próba?

7. Partię 100000 zł, zawierającą 200 zł wadliwych, podzielono na 500 pudełek zawierających po 200 zł każde. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ustalonym pudełku będą co najmniej 2 zł wadliwe.

8. $\xi_1, \xi_2, \dots$ to niezależne zmienne losowe o wspólnym rozkładzie dwupunktowym: $\mathbb{P}[\xi_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_i = 0] = p$, gdzie p jest nieznanym parametrem. Obserwujemy 100 takich zmiennych losowych i wyznaczamy ich *średnią empiryczną* $a(\omega) = \bar{\xi}(\omega) = \frac{\xi_1(\omega) + \dots + \xi_{100}(\omega)}{100}$. Na tej podstawie wyznaczyć taki przedział $A = [A_1(\omega), A_2(\omega)]$, żeby $\mathbb{P}[p \in A] \geq 0,95$.

9. Za pomocą dystrybuanty rozkładu normalnego oszacować, ile doświadczeń należy wykonać, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 można było stwierdzić, że częstość występowania interesującego nas zdarzenia będzie się odchyłać od prawdopodobieństwa, równego 0,3, nie więcej niż o 0,05?

10. r_k , $k = 1, 2, \dots$ to zmienne Rademachera, natomiast $Z_1, Z_2, \dots$ są niezależne między sobą, niezależne od zmiennych r_k i mają rozkład następujący: $P(Z_k = \pm k) = \frac{1}{2k^2}$, $P(Z_k = 0) = 1 - \frac{1}{k^2}$. Kładziemy $X_k = r_k + Z_k$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Wyznaczyć rozkład graniczny sum unormowanych $\hat{S}_n = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var } S_n}}$.

11. Pokazać, że ciąg zmiennych losowych

$$\hat{S}_n := \frac{r_1 + \dots + r_n}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny według rozkładu do $\mathcal{N}(0, 1)$, ale nie jest zbieżny ani prawie na pewno, ani według prawdopodobieństwa.

Wskazówka. Najpierw sprawdzić, że nie jest spełniony warunek Cauchy'ego w L^2 , a potem uzasadnić, że w tym przypadku zbieżność w.p. pociągałaby zbieżność w L^2 .