

RP I 2017, seria X

1. [dystrybuanta empiryczna] Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i jednakowo rozłożone, o wspólnej dystrybuancie F . Niech dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{F}_n^t = \frac{\#\{k \leq n : X_k \leq t\}}{n}.$$

Wykazać, że $\overline{F}_n^t \rightarrow F(t)$, prawie na pewno.

2. [empiryczna wartość oczekiwana, empiryczna wariancja] $X_1, X_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych i jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o skończonej wariancji. Wprowadzamy tzw. empiryczną wartość oczekiwaną oraz empiryczną wariancję:

$$\overline{m}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{oraz} \quad \overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \overline{m}_n)^2.$$

Wykazać, że: a) zachodzi $\mathbb{E}(\overline{m}_n) = \mathbb{E}(X_1)$ i $\mathbb{E}\overline{\sigma}_n^2 = \text{Var } X_1$,

b) $\overline{m}_n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$ oraz $\overline{\sigma}_n^2 \rightarrow \text{Var } X_1$, w sensie zbieżności prawie na pewno.

3. Zmienne losowe ξ_i są niezależne i jednakowo rozłożone, $\mathbb{E}\xi_1 = \mu$; $\text{Var } \xi_1 = \sigma^2$, $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = 0$. Zbadać zbieżność ciągu zmiennych losowych

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}.$$

4. Zmienne losowe (ξ_n) są niezależne i mają wspólny rozkład wykładniczy z parametrem 2. Zbadać, czy ciąg zmiennych losowych:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n + 2n}{X_1^2 + \dots + X_n^2}$$

jest zbieżny p.n. Wyznaczyć granicę.

5. $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i jednakowo rozłożone: $\mathbb{P}(X_n = \pm 2) = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \geq n)$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_1 + \dots + X_n| \leq n^2)$.

6. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o rozkładach:

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{1+n^2}, \quad \mathbb{P}(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{n^2}{1+n^2}.$$

Czy do tego ciągu zmiennych losowych stosuje się słabe/mocne prawo wielkich liczb?

7. ξ_n – niezależne zmienne losowe o rozkładzie Poissona z par. 2 każda, g_n – zmienne gaussowskie (niekoniecznie niezależne między sobą i niekoniecznie niezależne od ξ_n) i takie, że $\mathbb{E}g_n = 0$, $\text{Var } g_n = \frac{1}{n^2}$. Definiujemy $\overline{\xi}_n = \xi_n + g_n$. Czy do ciągu $\overline{\xi}_n$ stosuje się mocne prawo wielkich liczb?

8. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n = 1, 2, \dots$, zmienna X_n ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1 - 2^{-n}]$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

jest zbieżny p.n. Wyznaczyć jego granicę.

9. Zmienne losowe (X_n) są niezależne i mają rozkład $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$, przy czym $\frac{1}{2} < p < 1$. Wykazać, że $X_1 + X_2 + \dots + X_n \rightarrow \infty$ p.n.

10. Dla $n = 1, 2, \dots$ zmienna losowa N_n ma rozkład Poissona z parametrem n . Wykaż, że ciąg $\frac{N_n}{n}$ jest zbieżny w L^1 .

11. Zmienne losowe X_n są i.i.d o następującym rozkładzie:

$$\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X_n = \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Wykazać, że $\xi_n = X_1 \cdot \dots \cdot X_n \rightarrow 0$ prawie na pewno, ale nie zachodzi $\xi_n \rightarrow 0$ w L^1 .

12. Kostka A ma 2 ścianki czerwone i 4 zielone, a kostka B odwrotnie: 4 czerwone i 2 zielone. Rzucamy 1 raz symetryczną monetą; jeżeli wypadnie orzeł to wybieramy kostkę A , a jeżeli reszka – to kostkę B . Następnie wykonujemy serię rzutów wybraną kostką. Niech zmienne losowe X_n będą zdefiniowane następująco:

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli w } n\text{-tym rzucie wypadła ścianka czerwona,} \\ 1 & \text{jeżeli w } n\text{-tym rzucie wypadła ścianka zielona.} \end{cases}$$

Wyznacz granicę ciągu $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, w sensie zbieżności prawie na pewno. Czy do ciągu X_n stosuje się prawo wielkich liczb?

13. Oblicz granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n;$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 \dots \int_0^1 \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} dx_1 \dots dx_n;$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n$, gdzie f jest daną funkcją ciągłą na odcinku $[0, 1]$.

14. [Wielomiany Bernsteina] Niech $f \in C[0, 1]$. Określamy:

$$B_n[f](x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Korzystając z nierówności Czebyszewa wykazać, że $B_n[f] \rightrightarrows f$, gdy $n \rightarrow \infty$ (zbieżność jednostajna na odcinku $[0, 1]$).