

RP I 2017, seria I

1. Niech $X = \{1, 2, \dots, n\}$ będzie zbiorem n -elementowym, $k \leq n$. Wykaż, że:

- a) liczba permutacji tego zbioru wynosi $n!$,
- b) liczba uporządkowanych k -tek bez powtórzeń $\{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in X, x_i \neq x_j \text{ dla } i \neq j\}$ (czyli tzw. wariacji bez powtórzeń) równa jest $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$;
- c) liczba nieuporządkowanych k -tek bez powtórzeń $\{\{x_1, \dots, x_k\} : x_i \in X, x_i \neq x_j \text{ dla } i \neq j\}$ (czyli tzw. kombinacji bez powtórzeń) równa jest $C_n^k = \binom{n}{k}$;
- d) liczba uporządkowanych k -tek z możliwymi powtórzeniami $\{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in X\}$ (czyli tzw. wariacji z powtórzeniami) równa jest $\tilde{V}_n^k = n^k$;
- e) liczba nieuporządkowanych k -tek z możliwymi powtórzeniami $\{\{x_1, \dots, x_k\} : x_i \in X\}$ (czyli tzw. kombinacji z powtórzeniami) równa jest $\tilde{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.

Uwaga. W przypadku wariacji i kombinacji z powtórzeniami nie trzeba zakładać, że $k \leq n$.

2. Liczby $1, 2, \dots, n$ zostały ustawione przypadkowo. Znajdź prawdopodobieństwo tego, że a) liczby 1 i 2; b) liczby 1, 2 i 3 pojawiły się w sąsiedztwie i w wymienionej kolejności; c) liczba 1 poprzedza liczbą 2, a ta z kolei liczbę 3 (ale niekoniecznie stoją koło siebie).

3. n patyków złamano na 2 części: długą i krótką, a następnie losowo połączono w pary. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) patyki zostały połączone tak samo, jak przed złamaniem?
- b) wszystkie długie części zostały połączone z krótkimi?

4. $n+1$ kul (odróżnialnych) rozmieszczamy w n komórkach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) którąś komórkę zostanie pusta?
- b) dokładnie jedna komórkę zostanie pusta?

Rozwiązać to zadanie przy założeniu, że kule nie są odróżnialne, a wszystkie rozróżnialne rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne.

5. Ile rozwiązań ma równanie:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

- a) w zbiorze liczb naturalnych?
- b) w zbiorze liczb naturalnych dodatnich?

6. Winda rusza z $n = 7$ pasażerami i zatrzymuje się na $k = 10$ piętrach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że winda zatrzyma się dokładnie 2 razy? Co najmniej 2 razy?

7. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w grupie n osób będą dwie, obchodzące urodziny tego samego dnia?

8. Gracze X, Y rzucają kolejno i właśnie w tej kolejności (tz., $XYXY\dots$) prawidłową kostką. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że Y wyrzuci jedynkę wcześniej, niż X liczbę parzystą.

Uwaga. Każdemu możliwemu ciągowi wyników o długości n należy przypisać prawdopodobieństwo $1/6^n$.

9. Gracze A i B rzucają na przemian kostką. Gracz A dostaje jeden punkt za każdą wyrzuconą jedynkę, a gracz B – za każdą liczbę parzystą. Gra kończy się, gdy któryś z nich uzyska dwa punkty. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że gra zakończy się wynikiem $2 : 0$.

Kontynuacja. A jakie jest prawdopodobieństwo tego, że końcowym wynikiem będzie $2:1$?

10. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że 2 rzuty po 3 kości dadzą nam tę samą konfigurację, jeżeli: a) odróżniamy kości, b) nie odróżniamy kości?