

Zadania na czwartą kartkówkę

1. Ciąg zmiennych losowych (X_n) zbiega według prawdopodobieństwa do zmiennej losowej stałe równej π . Wykazać, że ciąg $\sin X_n$ zbiega według prawdopodobieństwa do 0.

2. Zmienne losowe X_n są niezależne, przy czym dla $n = 1, 2, \dots$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na $[-n, n]$. Dla jakich $p > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny prawie na pewno?

3. Dany jest ciąg X_n , $n = 2, 3$, niezależnych zmiennych losowych, przy czym każda ze zmiennych X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem $\ln n$. Dowieść, że:

(a) ciąg X_n zbiega do zera według prawdopodobieństwa,

(b) ciąg X_n nie zbiega do zera prawie na pewno.

Wskazówka do (b): lemat Borela-Cantelli.

4. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne, o następujących rozkładach:

$$\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Roztrzygnąć, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n X_{n+1}$ jest zbieżny prawie na pewno.

5. Dwuwymiarowe zmienne losowe (X_k, Y_k) są niezależne, przy czym (X_k, Y_k) ma rozkład jednostajny na kole o środku $(0, 0)$ i promieniu k . Zbadać zbieżność ciągu zmiennych losowych (gdy $n \rightarrow \infty$):

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k < Y_k\}}.$$

6. Dla $n = 1, 2, \dots$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[\frac{1}{n}, 1]$. Zmienne te są niezależne. Wykazać, że ciąg

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

jest zbieżny p.n. i znaleźć jego granicę.

7. X_n jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Wyznaczyć granicę prawdopodobieństw

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{X_1^3 + \dots + X_n^3}{X_1 + \dots + X_n} < \frac{1}{2} \right).$$

8. Zmienne losowe N_n mają rozkład Poissona z parametrem n . Wykazać, że $\frac{N_n}{n}$ zbiega do 1 w sensie zbieżności w L^1 .

9. Rzucamy symetryczną monetą aż uzyskamy 200 orłów (łącznie). Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że musieliśmy wykonać więcej niż 440 rzutów?

10. W sklepiu szkolnym jest 150 batonów Mars i 75 paczek herbatników Petit Beurre. Wiadomo, że batoniki cieszą się dwukrotnie większą popularnością niż herbatniki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród 200 dzieci kupujących tego dnia słodycze, któreś nie dostanie tego rodzaju, które będzie chciało?