

Zadania na trzecią kartkówkę

1. Zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Proszę wykazać, że $|X|$ i $\frac{X}{|X|}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i każda z nich ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, $Exp(1)$. Proszę wyznaczyć:

- (a) rozkład zmiennej losowej $\frac{X}{X+Y}$,
- (b) gęstość zmiennej losowej $X - Y$.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne i każda z nich ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Proszę wykazać, że zmienne losowe $\frac{Y}{X}$ oraz $\sqrt{X^2 + Y^2}$ są niezależne.

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości $g(x, y) = C \cdot e^{-x-2y} \mathbf{1}_{\{0 < x < y\}}$.

- (a) Wyznacz stałą C .
- (b) Oblicz $Cov(X + Y, 2X - Y)$.

6. Rzucamy n razy symetryczną kostką. Niech X – liczba uzyskanych jedynek, Y – liczba uzyskanych szóstek. Proszę wyznaczyć $Cov(X, Y)$.

7. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i każda z nich ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(0, 1)$. Definiujemy

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : X_1 + \dots + X_n \geq 1\}.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej τ oraz $\mathbb{E}\tau$.

Wskazówka. Wygodnie jest wyznaczyć ogony zmiennej losowej τ tj. $\mathbb{P}(\tau \geq t)$.

8. Niech $\alpha \geq 1$ będzie ustalone. Dane są zmienne losowe N_n , $n = 1, 2, \dots$, gdzie każda z N_n ma rozkład Poissona z parametrem $-\log(1 - (n+1)^{-\alpha})$.

- (a) Proszę wykazać, że jeżeli $\alpha > 1$, to ciąg (N_n) jest zbieżny prawie na pewno.
- (b) Proszę pokazać, że jeżeli $\alpha = 1$ i zmienne losowe $N_1, N_2, \dots$ są niezależne, to ciąg N_n nie jest zbieżny prawie na pewno.

9. $X_1, X_2, \dots$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq 0$, prawie na pewno. Udowodnij, że jeżeli $X_n \rightarrow 0$ według prawdopodobieństwa, to $X_n \rightarrow 0$ prawie na pewno.

10. Zmienne losowe X_n są niezależne, przy czym dla $n = 1, 2, \dots$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na $[-n, n]$. Dla jakich $p > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n^p}$ jest zbieżny prawie na pewno?

11. Zmienne losowe X_n są niezależne, dla $n = 1, 2, \dots$ X_n ma rozkład Poissona z parametrem $\frac{1}{n^2}$; natomiast Y_n są zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2^n})$ (nie zakładamy niczego o niezależności). Kładziemy $Z_n = X_n + Y_n$. Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ jest zbieżny p.n.?

