

Zadania na drugą kartkówkę

1. Rzucamy nieskończenie wiele razy symetryczną monetą. Niech X_n oznacza liczbę orłów w pierwszych n rzutach. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dla nieskończenie wielu n zachodzi $4X_n = n$?

2. Rzucamy 1 raz symetryczną kostką do gry. Jeżeli wypadnie szóstka, to uzyskujemy prawo do drugiego rzutu; jeżeli drugi raz wypadnie szóstka, to do trzeciego itd. Uzyskane wyniki sumujemy.

(a) Pokazać, że prawie na pewno wykonamy tylko skończenie wiele rzutów.

(b) Wyznaczyć rozkład uzyskanej liczby oczek.

3. Z przedziału $[0, 1]$ losujemy po kolei i niezależnie od siebie liczby $a_1, a_2, \dots$ (zgodnie z prawdopodobieństwem 'geometrycznym'). Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że ciąg a_n jest od pewnego miejsca malejący.

4. Rzeczywiste zmienne losowe X oraz e^{X-1} mają taki sam rozkład. Pokazać, że $\mathbb{P}(X = 1) = 1$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g_X(x) = \frac{1}{2} \cos x \cdot \mathbf{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x).$$

Oblicz $\mathbb{P}(4X^2 > X)$ oraz wyznacz rozkład zmiennej losowej $\min(X, 1)$.

6. Dana jest funkcja $f(x) = a(l^2 - x^2)^{-1/2}$ dla $|x| < l$ oraz $f(x) = 0$ dla $|x| \geq l$. Określić parametr a w taki sposób, by $f(x)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej ξ . Wyznaczyć jej dystrybuantę i prawdopodobieństwo $P[0 \leq \xi < 1]$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $g(x) = ax^2 \mathbf{1}_{[1,2]}(x)$.

(a) Wyznaczyć a .

(b) Czy da się znaleźć taką funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, by $F(X)$ miało rozkład wykładniczy z parametrem 1?

8. Rzucamy 1 raz kostką, a potem tyle razy symetryczną monetą, jaki był wynik na kostce. Niech X – liczba uzyskanych orłów. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

9. W urnie znajdują się 3 białe oraz 4 czarne kule. Losujemy kolejno kule z urny, przy czym jeżeli wyciągnęliśmy kulę czarną, to wrzucamy ją z powrotem do urny, a jeżeli kulę białą, to odkładamy ją na bok. Niech X oznacza numer losowania, po którym w urnie będą same czarne kule. Oblicz $\mathbb{E}X$.