

Podstawy matematyki – ćwiczenia 6

12.11.2012 r.

1. Jaka jest najmniejsza i największa (w sensie zawierania) relacja równoważności w danym zbiorze?
2. Niech R – relacja dwuargumentowa w $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że

$$\langle x, y \rangle \in R \text{ wtw. } \forall n. f(n) - g(n) \text{ jest parzysta.}$$

- (a) Udowodnić, że R jest relacją równoważności.
 - (b) Opisać klasę abstrakcji identyczności $I_{\mathbb{N}}$.
 - (c) Czy zbiór klas abstrakcji jest nieskończony?
 - (d) Czy zbiór $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f(0) = 2\}$ jest klasą abstrakcji tej relacji?
3. Niech A będzie niepustym zbiorem i niech $f : A \rightarrow A$.

- (a) Udowodnić, że jeśli f jest różnowartościowa, to relacja $r \subseteq A \times A$ dana warunkiem

$$xry \text{ wtw. } \exists n(f^n(x) = y \vee f^n(y) = x)$$

jest relacją równoważności.

- (b) Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne, tj. jeśli r jest relacją równożności, to f musi być różnowartościowa?
- (c) Podać przykład takich A i f , że r ma nieskończenie wiele skończonych klas abstrakcji, każdą o innej liczbie elementów. (Można zrobić rysunek.)