

### Podstawy matematyki – ćwiczenia 3

22.10.2012 r.

1. Czy dla każdego  $A$  i dla każdej relacji  $R \subseteq A \times A$  zachodzi
  - (a)  $R^{-1} \cdot R \subseteq I_A$ ;
  - (b)  $I_A \subseteq R^{-1} \cdot R$ ?
2. Niech  $R, S \subseteq A \times A$ . Czy z tego, że  $R \cdot S = S \cdot R$  wynika, że  $R = S$  lub  $S = I_A$  lub  $S = I_A$ ?
3. Podać przykład 5-elementowej relacji na zbiorze liczb naturalnych i takiej, że jest ona
  - (a) symetryczna;
  - (b) zwrotna;
  - (c) przechodnia.
4. Udowodnić, że relacja  $R$  jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy  $R \cdot R \subseteq R$ .
5. Niech  $R$  będzie niepustą rodziną relacji przechodnich. Udowodnić, że  $\bigcap R$  jest relacją przechodnią.
6. Niech  $r \subseteq A \times A$ . Udowodnij, że

$$r^+ = \bigcup \{r^n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

gdzie  $r^1 = r$  i  $r^{n+1} = r \cdot r^n$ .