

### Podstawy matematyki – ćwiczenia 13

9.01.2012 r.

1. Pokazać, że dla dowolnego  $X$  zbiór  $\langle P(X), \subseteq \rangle$  jest kratą zupełną.
2. Rozważmy zbiór  $\langle A \rightsquigarrow B, \leq \rangle$  funkcji częściowych z  $A$  do  $B$  z porządkiem

$$f \leq g \text{ wtw. } \text{Dom}(f) \subseteq \text{Dom}(g) \wedge \forall x \in \text{Dom}(f)(f(x) = g(x)).$$

Czy (Kiedy)  $\langle A \rightsquigarrow B, \subseteq \rangle$  jest kratą zupełną?

3. Pokazać, że  $\langle A \rightsquigarrow B, \subseteq \rangle$  jest zupełnym porządkiem częściowym.
4. Podaj przykład takiego przekształcenia monotonicznego  $f$  w kracie  $\langle P(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ , że kres górny zbioru  $\{f^n(\emptyset) : n \in \mathbb{N}\}$  nie jest najmniejszym punktem stałym  $f$ . Czy można tak wybrać  $f$ , aby najmniejszy punkt stały nie istniał?
5. Z badać, czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne:

(a)  $p \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ,

(b)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ ,

(c)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ .

6. Znaleźć, o ile istnieje, taką formułę  $\alpha$ , aby następująca formuła była tautologią rachunku zdań.

(a)  $p \vee \alpha \rightarrow \alpha \wedge p$ ,

(b)  $p \vee \alpha \rightarrow \alpha \wedge q$ ,

(c)  $(\alpha \rightarrow p) \wedge (\neg \alpha \rightarrow q)$ .