

Podstawy matematyki – ćwiczenia 10

12.12.2011 r.

1. W zbiorze $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 24\}$ uporządkowanym częściowo przez relację podzielności wskazać wszystkie elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze. Czy istnieją w tym zbiorze trzelementowe łańcuchy lub antyłańcuchy?
2. Podać przykład zbioru częściowo uporządkowanego z dwoma elementami maksymalnymi, jednym minimalnym, bez elementu najmniejszego i z takim czteroelementowym antyłańcuchem, który jest ograniczony z góry, ale nie ma kresu górnego.
3. Rozpatrzmy uporządkowanie zbioru $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$:

$$f \leq g \text{ wtw. } \forall x(f(x) \leq g(x)).$$

- (a) Czy ten porządek jest liniowy?
 - (b) Czy istnieje w nim łańcuch nieskończony?
 - (c) Czy istnieje w nim antyłańcuch nieskończony?
 - (d) Czy istnieje w nim element najmniejszy, największy, minimalny lub maksymalny?
4. Czy zbiór $\{01^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ma kres górny (dolny) w zbiorze $\{0, 1\}^*$ uporządkowanym leksyko-graficznie?
 5. Czy zbiór $\{0^n1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ma kres górny (dolny) w zbiorze $\{0, 1\}^*$ uporządkowanym leksyko-graficznie?
 6. Które z następujących twierdzeń jest prawdziwe dla dowolnego zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, \leq \rangle$ oraz dowolnych $A, B \subseteq X$.
 - (a) Jeśli w X istnieje $\sup(A \cup B)$, to istnieją także $\sup(A)$ i $\sup(B)$.
 - (b) Jeśli w X istnieją $\sup(A)$ i $\sup(B)$, to istnieje także $\sup(A \cup B)$.