

## Podstawy matematyki – ćwiczenia 6

14.11.2011 r.

1. Czy są relacjami równoważności:
  - (a)  $r \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$ ;
  - (b)  $r \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow x^2 = y^2$ ;
  - (c)  $r \subseteq \mathbb{Z}^2$ ,  $\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow x \leq y$ ;
  - (d)  $r \subseteq P(\mathbb{N})^2$ ,  $\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow x \cap \mathbb{P} = y \cap \mathbb{P}$ ,  $\mathbb{P}$  to zbiór liczb parzystych?
2. Znaleźć klasę abstrakcji
  - (b)  $[1]_r$ ;
  - (d)  $[\{1\}]_r$ .
3. Czy istnieje relacja równoważności na  $\mathbb{N}$ , która ma
  - (a) dwie klasy abstrakcji, każda po 37 elementów;
  - (b) dwie klasy abstrakcji po 17 elementów, pięć klas po 33 elementy i jedną klasę nieskończoną;
  - (c) nieskończenie wiele klas abstrakcji, każda o nieskończonej liczbie elementów;
4. Czy iloczyn dwóch relacji równoważności musi (może) być relacją równoważności?
5. Niech  $r_1, r_2$  będą relacjami równoważności na  $A$ .
  - (a) Czy  $r_1 \cup r_2$  jest relacją równoważności?
  - (b) Czy  $r_1 \cap r_2$  jest relacją równoważności?
  - (c) Czy  $r_1; r_2$  jest relacją równoważności?
6. Niech  $R$  – relacja dwuargumentowa w  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  taka, że
$$\langle x, y \rangle \in R \text{ wtw. } \forall n. f(n) - g(n) \text{ jest parzysta.}$$
  - (a) Udowodnić, że  $R$  jest relacją równoważności.
  - (b) Opisać klasę abstrakcji identyczności  $I_{\mathbb{N}}$ .
  - (c) Czy zbiór klas abstrakcji jest nieskończony?
7. Niech  $\mathbb{Z}[x]$  oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej  $x$  o współczynnikach całkowitych. Niech  $r$  będzie taką relacją w zbiorze  $\mathbb{Z}[x]$ , że  $\langle f, g \rangle \in r$  wtedy i tylko wtedy, gdy różnica  $f - g$  ma wszystkie współczynniki parzyste.
  - (a) Pokazać, że  $r$  jest relacją równoważności.
  - (b) Opisać klasę abstrakcji wielomianu zerowego.
  - (c) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
  - (d) Czy zbiór  $\mathbb{Z}[x]_r$  jest skończony?
  - (e) Czy zbiór  $\{W(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid W(0) = 2\}$  jest klasą abstrakcji tej relacji?