

Podstawy matematyki – ćwiczenia 4

24.10.2011 r.

1. Udowodnić, że jeśli $R \subseteq S$, to $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.
2. Czy prawdziwy jest wzór $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$?
3. Czy dla każdego A i dla każdej relacji $R \subseteq A \times A$ zachodzi
 - (a) $R^{-1}; R \subseteq I_A$;
 - (b) $I_A \subseteq R^{-1}; R$?
4. Podać przykład 5-elementowej relacji na zbiorze liczb naturalnych i takiej, że jest ona
 - (a) symetryczna;
 - (b) zwrotna;
 - (c) przechodnia.
5. Udowodnić, że jeśli relacja R jest przechodnia, to relacja R^{-1} też jest przechodnia.
6. Udowodnić, że relacja R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R; R \subseteq R$.
7. Niech \mathcal{R} będzie niepustą rodziną relacji przechodnich w A taką, że dla każdych $r, s \in \mathcal{R}$ zachodzi $r \subseteq s$ lub $s \subseteq r$. Udowodnić, że $\bigcup \mathcal{R}$ jest relacją przechodnią.
8. Udowodnić, że

$\langle x, y \rangle \in R^*$ wtw. istnieje $n \geq 0$ i skończony ciąg $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$
 $\forall i = 1, \dots, n(x_{i-1} R x_i)$.