

Podstawy matematyki - ćwiczenia 1

3.10.2011 r.

Ćwiczenia

1. Zbadać, które z następujących formuł są tautologiami.

(a) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$;

(b) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)$.

2. Zaznacz na rysunku zbiory.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \rightarrow y + x > 0\}$,

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 > 1) \rightarrow [(x^2 + y^2 \leq 2) \wedge (\neg(x \cdot y = 0) \rightarrow |y| = |x|)]\}$,

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x^2 + y^2 = 4) \rightarrow (y > -1 \wedge y \neq 1)) \rightarrow (x^2 + y^2 = 9)\}$,

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall z(z + y < 0) \rightarrow y + x < 0\}$,

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \rightarrow \exists z(x^2 + (y - 2)^2 \leq \frac{1}{4})\}$.

3. Zaznacz na rysunku zbiory.

(a) $\{z \in \mathbb{R} \mid \forall x \exists x(x = 1)\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{R} \mid \exists x \forall x(x = 1)\}$,

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall x \exists x(x = 1)\}$.

4. W języku arytmetyki liczb naturalnych $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, =)$ zapisać za pomocą symboli logicznych i kwantyfikatorów następujące stwierdzenia:

(a) Liczba a jest mniejsza lub równa liczbie b .

(b) Liczba a jest resztą z dzielenia liczby b przez c .

(c) Liczba a jest pierwsza.

(d) Liczba a jest największym wspólnym dzielnikiem liczb b i c chyba, że jest pierwsza.

Praca domowa

1. Zaznacz na rysunku zbiory.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall z(y^2 + (x - z)^2 \neq 1) \rightarrow \exists z((x - z)^2 + (y - z)^2 = 1)\}.$$

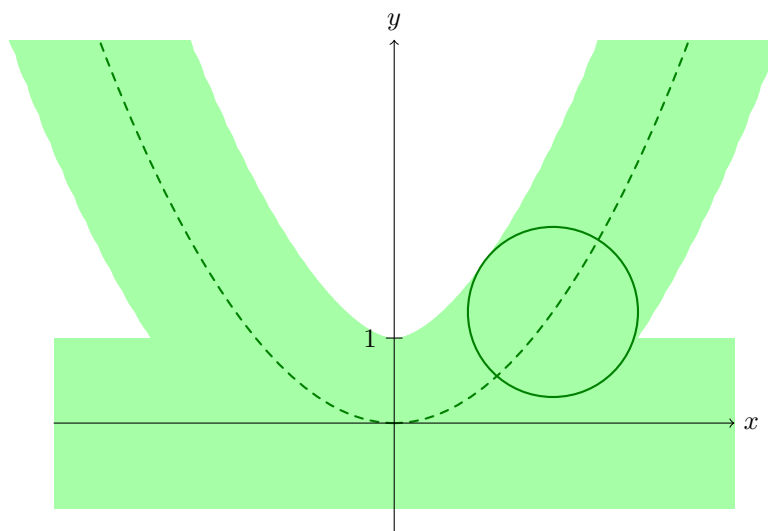
2. W języku arytmetyki liczb naturalnych $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, =)$ zapisać za pomocą symboli logicznych i kwantyfikatorów następujące stwierdzenia:

(a) Liczby x i y mają te same dzielniki pierwsze.

(b) Żadna liczba parzysta nie jest mniejsza od każdej liczby pierwszej.

Odpowiedzi do pracy domowej

1.



2. Używamy następujących oznaczeń: $P(x)$ – x jest liczbą pierwszą, $x \mid y$ – x dzieli y , $Parz(x)$ – x jest liczbą parzystą.

(a) $\forall d(P(d) \rightarrow (d \mid x \leftrightarrow d \mid y))$;

(b) $\neg \exists x(Parz(x) \wedge (\forall y(P(y) \rightarrow x < y)))$ lub równoważnie $\forall x(Parz(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge x \geq y))$.