

Logika dla informatyków – ćwiczenia 8

28.11.2011 r.

1. Udowodnić, że istnieje niestandardowy model arytmetyki.
2. Wskazać przykład takiego zbioru Δ zdań logiki pierwszego rzędu, że każde dwa jego przeliczalne modele są izomorficzne, ale istnieją dwa nieprzeliczalne nieizomorficzne modele zbioru Δ .
3. Napisać formułę $\varphi(x)$ nad sygnaturą arytmetyki orzekającą, że x jest silnią pewnej liczby, tzn. że dla wszystkich wartościowań $v : X \rightarrow \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, v) \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(x)$ jest postaci $n!$ dla pewnego n .

4. Napisać formułę $\varphi(x, y)$ nad sygnaturą arytmetyki definiującą funkcję $y = \lfloor \log_2 x \rfloor$, tzn. taką, że dla wszystkich wartościowań $v : X \rightarrow \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, v) \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(y) = \lfloor \log_2 v(x) \rfloor$.

5. Udowodnić, że jeśli funkcja $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest definiowalna w języku arytmetyki, to jest też definiowalna funkcja $G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dana wzorem

$$G(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n = 0 \\ F(G(n-1)), & \text{gdy } n > 0. \end{cases}$$