**Logika dla informatyków – ćwiczenia 4**
24.10.2011 r.

1. Udowodnić, że struktury $\langle P(\mathbb{R}), \cup, \cap\rangle$ i $\langle \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \max, \min\rangle$, gdzie

$$\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x)),$$
$$\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

   są izomorficzne.

2. Które z następujących struktur są izomorficzne?
   (a) $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$, $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1\rangle$,
   (b) $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle$, $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$,
   (c) $\langle P_2, \perp\rangle$, $\langle P_3, \perp\rangle$, gdzie $P_2$ – zbiór prostych w $\mathbb{R}^2$, $P_3$ – zbiór prostych w $\mathbb{R}^3$,
   (d) $\langle P_2, \perp\rangle$, $\langle P_2, \|\rangle$, gdzie $P_2$ – zbiór prostych w $\mathbb{R}^2$,
   (e) $\langle \mathbb{N} - \{0\}, \cdot\rangle$, $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, +\rangle$, gdzie $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$,
   (f) $\langle P_2, \|\rangle$, $\langle P_3, \|\rangle$, gdzie $P_2$ – zbiór prostych w $\mathbb{R}^2$, $P_3$ – zbiór prostych w $\mathbb{R}^3$.

3. Podać przykład zdania $\varphi$ (sygnatura do wyboru) takiego, że dla każdego naturalnego $n$ zdanie $\varphi$
   (a) ma dokładnie $2^n$ nieizomorficznych modeli mocy $n$;
   (b) ma dokładnie $n$ nieizomorficznych modeli mocy $n$;
   (c) ma dokładnie $n!$ nieizomorficznych modeli mocy $n$.

4. Udowodnić, że każda struktura skończona nad skończoną sygnaturą może być zdefiniowana dokładnością do izomorfizmu w logice pierwszego rzędu.