

Logika dla informatyków – ćwiczenia 3

17.10.2011 r.

1. Z badać, czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne

- (a) $\exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$;
- (b) $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \vee \forall x(q(x) \rightarrow p(x))$;
- (c) $(\exists x\exists yP(x, y) \rightarrow \forall yR(y)) \rightarrow \forall x(P(x, x) \rightarrow R(x))$;
- (d) $\exists x\forall y(p(x) \vee q(y)) \rightarrow \forall y(p(f(y)) \vee q(y))$;
- (e) $\forall y(p(f(y)) \vee q(y)) \rightarrow \exists x\forall y(p(x) \vee q(y))$.

2. Wskazać formułę pierwszego rzędu

- (a) spełnialną w $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, ale nie w $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$;
- (b) spełnialną w $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$, ale nie w $\langle \mathbb{N}, + \rangle$;
- (c) spełnialną w $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \epsilon \rangle$, ale nie w $\langle \{a, b, c\}^*, \cdot, \epsilon \rangle$.

3. Dla każdej z par struktur wskazać zdanie prawdziwe w jednej z nich, a w drugiej nie

- (a) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \{m - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}, \leq \rangle$,
- (b) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$,
- (c) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$.

4. Sygnatura Σ składa się z symboli $r, s \in \Sigma_1^R$, $R, S \in \Sigma_2^R$ i $g \in \Sigma_2^F$. Napisać takie zdania φ i ψ , że

- (a) zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle a, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$, w których obie relacje $R^{\mathcal{A}}$ i $S^{\mathcal{A}}$ są przechodnie, ale ich suma nie jest przechodnia;
- (b) zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle a, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$, w których obie relacje $s^{\mathcal{A}}$ jest obrazem iloczynu kartezjańskiego $r^{\mathcal{A}} \times r^{\mathcal{A}}$ przy funkcji $g^{\mathcal{A}}$.

5. Dana jest struktura $\mathcal{P} = \langle \mathbb{P}, r^{\mathcal{P}} \rangle$, gdzie \mathbb{P} to zbiór wszystkich okręgów o promieniu 1 na płaszczyźnie, a $r^{\mathcal{P}}(o_1, o_2)$ wtw. o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie. Napisać formułę $\varphi(x, y)$ taką, że $\mathcal{P} \models \varphi[o_1, o_2]$ wtw. odległość między środkami okręgów o_1 i o_2 jest większa niż 4.