

Logika dla informatyków - ćwiczenia 2

10.10.2011 r.

1. Niech $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$ i $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{B}}, r^{\mathcal{B}} \rangle$, gdzie

- $f^{\mathcal{A}} = \min(m, n)$, $r^{\mathcal{A}}$ jest \geq ;
- $f^{\mathcal{B}} = m^2 + n^2$, $r^{\mathcal{B}}$ jest \leq .

Zbadać, czy formuły są spełnione przy wartościowaniu $v(z) = 5$, $v(y) = 7$ w strukturach \mathcal{A} i \mathcal{B} .

(a) $\forall y(\forall x(r(z, f(x, y)) \rightarrow r(z, y)))$,

(b) $\forall y(\forall x(r(z, f(x, y))) \rightarrow r(z, y))$.

2. Dana jest struktura $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. Napisać formułę

(a) $\varphi(x, y)$ taką, że $\mathcal{N}, v \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(x) \leq v(y)$;

(b) $\varphi(x)$ taką, że $\mathcal{N}, v \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(x)$ jest liczbą pierwszą;

(c) $\varphi(x, y)$ taką, że $\mathcal{N}, v \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(x)$ i $v(y)$ mają te same dzielniki pierwsze;

(d) $\varphi(x)$ taką, że $\mathcal{N}, v \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(x)$ jest potęgą liczby 17.

3. Dana jest struktura $\mathcal{P} = \langle P, r^{\mathcal{P}} \rangle$, gdzie P jest zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie, a $r^{\mathcal{P}}$ jest określone następująco:

$r^{\mathcal{P}}(p, q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy p i q przecinają się pod kątem 60° .

Napisać formułę φ taką, że $\mathcal{P} \models \varphi[p, q]$ wtedy i tylko wtedy, gdy proste p i q są równoległe.

4. Dla każdego n napisać takie zdanie φ_n , że $\mathcal{A} \models \varphi_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{A} ma dokładnie n elementów.

5. Czy jeśli $\mathcal{A} \models \exists x \varphi$, to także $\mathcal{A} \models \varphi[t/x]$ dla pewnego termu t ?