

## Podstawy matematyki – ćwiczenia 11

20.12.2010 r.

1. Czy zbiór  $\langle \mathbb{N}^*, \leq_{lex} \rangle$  jest dobrze ufundowany?
2. Czy zbiór  $\langle \mathbb{N}^2, \leq_{lex} \rangle$  jest dobrze ufundowany? A zbiór  $\langle \mathbb{N}^k, \leq_{lex} \rangle$ ?
3. Pokazać, że dla dowolnego  $X$  porządek  $\langle P(X), \subseteq \rangle$  jest kratą zupełną.
4. Rozważmy zbiór  $\langle A \rightsquigarrow B, \leq \rangle$  funkcji częściowych z  $A$  do  $B$  z porządkiem

$$f \leq g \text{ wtw. } Dom(f) \subseteq Dom(g) \wedge \forall x \in Dom(f)(f(x) = g(x)).$$

Czy (Kiedy)  $\langle A \rightsquigarrow B, \subseteq \rangle$  jest kratą zupełną?

5. Pokazać, że  $\langle A \rightsquigarrow B, \subseteq \rangle$  jest zupełnym porządkiem częściowym.
6. Rozpatrzmy uporządkowanie zbioru  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ :

$$f \leq g \text{ wtw. } \forall x(f(x) \leq g(x)).$$

- (a) Czy ten porządek jest liniowy?
  - (b) Czy ten porządek jest dobrym ufundowaniem?
  - (c) Czy ten porządek jest kratą zupełną?
  - (d) Czy ten porządek jest zupełnym porządkiem częściowym?
  - (e) Czy istnieje w nim łańcuch nieskończony?
  - (f) Czy istnieje w nim antyłańcuch nieskończony?
  - (g) Czy istnieje w nim element najmniejszy, największy, minimalny lub maksymalny?
7. Niech  $A = \{3 - \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ ,  $B = \{\pi - \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{4\}$ ,  $C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (2m, 2m + 1]$ .  
Rozpatrzmy zbiory  $A, B, C, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q} - \{0\}, \mathbb{R}$  uporządkowane przez zwykły porządek  $\leq$ .  
Które z nich są izomorficzne?