

Podstawy matematyki – ćwiczenia 6

15.11.2010 r.

1. Czy są relacjami równoważności:
 - (a) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$;
 - (b) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow x^2 = y^2$;
 - (c) $r \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow x \leq y$;
 - (d) $r \subseteq P(\mathbb{N})^2$, $\langle x, y \rangle \in r \Leftrightarrow x \cap \mathbb{P} = y \cap \mathbb{P}$, \mathbb{P} to zbiór liczb parzystych?
2. Znaleźć klasę abstrakcji
 - (b) $[1]_r$;
 - (d) $[\{1\}]_r$.
3. Czy istnieje relacja równoważności na \mathbb{N} , która ma
 - (a) dwie klasy abstrakcji, każda po 37 elementów;
 - (b) dwie klasy abstrakcji po 17 elementów, pięć klas po 33 elementy i jedną klasę nieskończoną;
 - (c) nieskończenie wiele klas abstrakcji, każda o nieskończonej liczbie elementów;
4. Niech $\mathbb{Z}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach całkowitych. Niech r będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}[x]$, że $\langle f, g \rangle \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $f - g$ ma wszystkie współczynniki parzyste.
 - (a) Pokazać, że r jest relacją równoważności.
 - (b) Opisać klasę abstrakcji wielomianu zerowego.
 - (c) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
 - (d) Czy zbiór $\mathbb{Z}[x]_r$ jest skończony?
 - (e) Czy zbiór $\{W(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid W(0) = 2\}$ jest klasą abstrakcji tej relacji?
5. Niech r_1, r_2 będą relacjami równoważności na A .
 - (a) Czy $r_1 \cup r_2$ jest relacją równoważności?
 - (b) Czy $r_1 \cap r_2$ jest relacją równoważności?
 - (c) Czy $r_1; r_2$ jest relacją równoważności?
6. Niech A będzie niepustym zbiorem i niech $f : A \rightarrow A$.
 - (a) Udowodnić, że jeśli f jest różnowartościowa, to relacja $r \subseteq A \times A$ dana warunkiem
$$xry \text{ wtw. } \exists n \in \mathbb{N}(f^n(x) = y \vee f^n(y) = x)$$
jest relacją równoważności.
 - (b) Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne, tj. czy jeśli r jest relacją równoważności to f musi być różnowartościowa?
 - (c) Podać przykład takich A i f , że r ma nieskończenie wiele skończonych klas abstrakcji. (Można zrobić rysunek)