

### Logika dla informatyków – ćwiczenia 13

10.01.2011 r.

1. Pokazać, że suma nie wyraża się za pomocą selekcji, rzutowania i produktu (SPC).
2. Pokazać, że różnica nie wyraża się za pomocą selekcji, rzutowania, produktu i sumy (SPCU).
3. Zbadać, jak się ma SPCU poszerzone o selekcję z nierównościami ( $\sigma_{i \neq j}$ ,  $\sigma_{i \neq c}$ ) do SPCU i pełnej algebry relacji.
4. Niejednostajna klasa  $AC^0$  składa się z funkcji  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$  takich, że istnieje wielomian  $p(n)$  i stała  $c$  takie, że dla każdego  $n$  istnieje sieć logiczna  $C$  obliczająca  $f(x)$  dla wszystkich  $x \in \{0, 1\}^n$ , która:
  - (a) ma  $n$  bramek wejściowych i 1 bramkę wyjściową
  - (b) jest ponadto złożona z bramek logicznych AND, OR i NOT
  - (c) bramki wejściowe i bramki logiczne mogą mieć dowolnie wiele wyjść
  - (d) bramki AND i OR mogą mieć dowolnie wiele wejść, a bramki NOT zawsze tylko jedno
  - (e) liczba bramek w sieci nie przekracza  $p(n)$
  - (f) głębokość sieci nie przekracza  $c$

Pokazać, że po odpowiednim (naturalnym) zakodowaniu struktur skończonych  $\mathfrak{A}$  w postaci ciągów binarnych  $code(\mathfrak{A})$ , dla każdego zdania  $\varphi$  logiki pierwszego rzędu funkcja

$$f_\varphi : code(\mathfrak{A}) \mapsto \text{if } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

należy do niejednostajnego  $AC^0$ .

5. Niejednostajna klasa  $NC^1$  składa się z funkcji  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$  takich, że istnieje wielomian  $p(n)$  i stała  $c$  takie, że dla każdego  $n$  istnieje sieć logiczna  $C$  obliczająca  $f(x)$  dla wszystkich  $x \in \{0, 1\}^n$ , która:
  - (a) ma  $n$  bramek wejściowych i 1 bramkę wyjściową
  - (b) jest ponadto złożona z bramek logicznych AND, OR i NOT
  - (c) bramki wejściowe i bramki logiczne mogą mieć dowolnie wiele wyjść
  - (d) bramki AND i OR mogą mieć dokładnie dwa wejścia, a bramki NOT zawsze tylko jedno
  - (e) liczba bramek w sieci nie przekracza  $p(n)$
  - (f) głębokość sieci nie przekracza  $c \log n$

Pokazać, że po odpowiednim (naturalnym) zakodowaniu struktur skończonych  $\mathfrak{A}$  w postaci ciągów binarnych  $code(\mathfrak{A})$ , dla każdego zdania  $\varphi$  logiki pierwszego rzędu funkcja

$$f_\varphi : code(\mathfrak{A}) \mapsto \text{if } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ then } 1 \text{ else } 0$$

należy do niejednostajnego  $NC^1$ .