

## Podstawy matematyki – ćwiczenia 8

27.11.2009 r.

### Ćwiczenia

1. Czy istnieje relacja równoważności na  $\mathbb{N}$ , która ma
  - (a) dwie klasy abstrakcji, każda po 37 elementów;
  - (b) dwie klasy abstrakcji po 17 elementów, pięć klas po 33 elementy i jedną klasę nieskończoną;
  - (c) nieskończenie wiele klas abstrakcji, każda o nieskończonej liczbie elementów;
  - (d) jedną pustą klasę abstrakcji i jedną nieskończoną klasę abstrakcji?
2. Niech  $\mathbb{Z}[x]$  oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej  $x$  o współczynnikach całkowitych. Niech  $r$  będzie taką relacją w zbiorze  $\mathbb{Z}[x]$ , że  $\langle f, g \rangle \in r$  wtedy i tylko wtedy, gdy różnica  $f - g$  ma wszystkie współczynniki parzyste.
  - (a) Pokazać, że  $r$  jest relacją równoważności.
  - (b) Opisać klasę abstrakcji wielomianu zerowego.
  - (c) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
  - (d) Czy zbiór  $\mathbb{Z}[x]_r$  jest skończony?
  - (e) Czy zbiór  $\{W(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid W(0) = 2\}$  jest klasą abstrakcji tej relacji?
3. Niech  $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  będzie relacją równoważności w zbiorze  $\mathbb{N}$  i niech  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$  będzie taka, że  $f(\langle x, y \rangle) = [x]_r \cap [y]_r$ .
  - (a) Czy  $f$  jest funkcją różnowartościową?
  - (b) Czy  $f$  jest na  $P(\mathbb{N})$ ?
  - (c) Znaleźć  $f^{-1}(\{[3]_r\})$ .
  - (d) Znaleźć  $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N} - r)$ .

### Praca domowa

1. Niech  $s$  będzie taką relacją w zbiorze  $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ , że  $\langle f, g \rangle \in s$  wtedy i tylko wtedy, gdy różnica  $f - g$  jest zbieżna do zera.
  - (a) Pokazać, że  $s$  jest relacją równoważności.
  - (b) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
2. Niech  $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  będzie relacją równoważności w zbiorze  $\mathbb{N}$  i niech  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$  będzie taka, że  $f(\langle x, y \rangle) = [x]_r \cup [y]_r$ .
  - (a) Czy  $f$  jest funkcją różnowartościową?
  - (b) Czy  $f$  jest na  $P(\mathbb{N})$ ?
  - (c) Znaleźć  $f^{-1}(\{[3]_r\})$ .
  - (d) Znaleźć  $f(r)$ .
3. Niech  $\mathcal{R}$  będzie niepustą rodziną relacji równoważności. Pokazać, że  $\bigcap \mathcal{R}$  jest relacją równoważności.