Podstawy matematyki – ćwiczenia 7
20.11.2009 r.

Ćwiczenia

1. Podać przykład $f : A \to B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ takich, że
   (a) $\vec{f}^{-1}(\vec{f}(X)) \neq X$;
   (b) $\vec{f}(\vec{f}^{-1}(X)) \neq X$;
   (c) $\vec{f}(C \cap D) \neq \vec{f}(C) \cap \vec{f}(D)$.
2. Niech $f : P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$ będzie dana wzorem
$$f(\langle C, D\rangle) = C \cap D.$$
   (a) Czy f jest różnowartościowa?
   (b) Czy f jest na $P(\mathbb{N})$?
   (c) Znaleźć $\vec{f}(P(B) \times P(B))$ dla $B \subseteq \mathbb{N}$.
   (d) Znaleźć $\vec{f}^{-1}(\{\mathbb{N}\})$.
3. Pokazać, że funkcja $\varphi : P(A)^B \to P(A \times B)$ dana wzorem
$$\varphi(f) = \{\langle a, b\rangle \in A \times B \mid a \in f(b)\}$$
   jest różnowartościowa i na.
4. Niech $f \in T \to T$. Udowodnić, że $f \circ f = f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{Rg(f)} = id_{Rg(f)}$.
5. Czy są relacjami równoważności:
   (a) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$;
   (b) $r \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x^2 = y^2$;
   (c) $r \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x \leqslant y$;
   (d) $r \subseteq P(\mathbb{N})^2$, $\langle x, y\rangle \in r \Leftrightarrow x \cap \mathbb{P} = y \cap \mathbb{P}$, (P) to zbiór liczb parzystych ?
6. Znaleźć klasę abstrakcji
   (b) $[1]_r$;
   (d) $[\{1\}]_r$.

Praca domowa

1. Niech $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie taka, że $\varphi(\langle n, k\rangle) = nk$. Zbadać, czy φ jest różnowartościowa i na $\mathbb{N}$. Znaleźć $\vec{\varphi}(\mathbb{P} \times \mathbb{N} \setminus \mathbb{P})$, $\vec{\varphi}^{-1}(\{1\})$, $\vec{\varphi}^{-1}(\mathbb{N} \setminus \mathbb{P})$, $\vec{\varphi}^{-1}(\{2^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\})$, gdzie $\mathbb{P}$ to zbiór liczb parzystych.
2. Niech $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to P(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\varphi) = \varphi(\mathbb{N})$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $P(\mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(B)$, gdzie B oznacza zbiór jednoelementowych podzbiorów $\mathbb{N}$.
3. Niech $f : A \to A$ i niech $f^n = f$ dla pewnego $n > 1$. Udowodnić, że $f(Rg(f)) = Rg(f)$.