

Problem sprawdzania typu dla logiki pierwszego rzędu

Agnieszka Kozubek

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

16 grudnia 2006 r.

Plan

- 1 Rachunek lambda
 - Wprowadzenie
 - Składnia rachunku lambda
 - Problem z rachunkiem lambda
- 2 Systemy przypisywania typów
 - Wprowadzenie
 - Przykład – logika pierwszego rzędu
 - Problemy w systemach przypisywania typów
 - Problemy w logice pierwszego rzędu
- 3 Problem sprawdzania typu dla logiki pierwszego rzędu
 - Mój wynik

Rachunek lambda

- początek w latach trzydziestych XX wieku (Church, Curry)
- teoretyczny model obliczeń
- podstawowe pojęcie: funkcja
- funkcja rozumiana w sposób intensjonalny
- nadaje się do modelowania języków funkcyjnych

Składnia rachunku lambda

Lambda term

- zmienne x, y, \dots są lambda termami
- jeśli M, N są lambda termami, to MN jest lambda termem
- jeśli x jest zmienną, M jest lambda termem, to $\lambda x.M$ jest lambda termem

Intuicja

Lambda term reprezentuje funkcję.

- zmienne x, y, \dots oznaczają pewne funkcje
- MN to aplikacja argumentu N do funkcji M
- $\lambda x.M$ to funkcja o parametrze x i ciele M

Składnia rachunku lambda

Lambda term

- zmienne x, y, \dots są lambda termami
- jeśli M, N są lambda termami, to MN jest lambda termem
- jeśli x jest zmienną, M jest lambda termem, to $\lambda x.M$ jest lambda termem

Intuicja

Lambda term reprezentuje funkcję.

- zmienne x, y, \dots oznaczają pewne funkcje
- MN to aplikacja argumentu N do funkcji M
- $\lambda x.M$ to funkcja o parametrze x i ciele M

Problem z rachunkiem lambda

Problem

Składamy dowolne lambda termy (dowolne funkcje).

Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^2$$

Problem z rachunkiem lambda

Problem

Składamy dowolne lambda termy (dowolne funkcje).

Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^2$$

Problem z rachunkiem lambda

Problem

Składamy dowolne lambda termy (dowolne funkcje).

Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^2$$

Co to jest $f(\text{)}$?



Problem z rachunkiem lambda

Problem

Składamy dowolne lambda termy (dowolne funkcje).

Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^2$$

Co to jest $f(\text{ })$?



Rozwiązanie

Rachunek lambda z typami

Systemy przypisywania typów dla rachunku lambda

$$\Gamma \vdash M : \tau$$

Środowisko

przypisuje typy
zmiennym

Lambda term

Typ

obiekt, który opisuje
dziedzinę i przeciw-
dziedzinę funkcji

Reguły przypisywania typów

Podobne do reguł dowodzenia w systemach formalnych

Systemy przypisywania typów dla rachunku lambda

$$\Gamma \vdash M : \tau$$

Środowisko

przypisuje typy
zmiennym

Lambda term

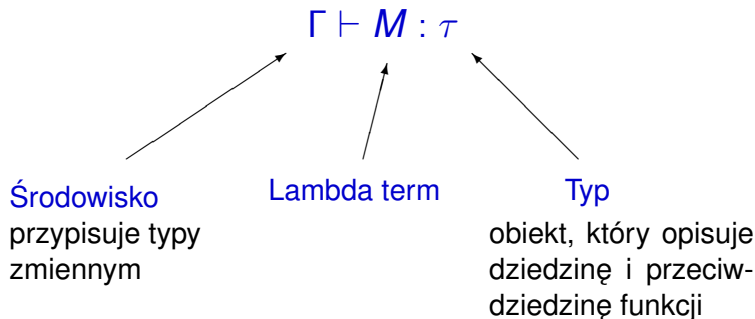
Typ

obiekt, który opisuje
dziedzinę i przeciw-
dziedzinę funkcji

Reguły przypisywania typów

Podobne do reguł dowodzenia w systemach formalnych

Systemy przypisywania typów dla rachunku lambda



Reguły przypisywania typów

Podobne do reguł dowodzenia w systemach formalnych

Przykład systemu typów — logika pierwszego rzędu

Typy

- $P(t_1, \dots, t_n)$ – formuły atomowe
- $\tau \rightarrow \sigma$, gdzie τ, σ są typami
- $\forall \alpha. \tau$, gdzie α jest zmienną, τ jest typem

Reguły przypisywania typów

$$\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \tau \rightarrow \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \tau}{\Gamma \vdash M : \tau[\alpha := t]}$$

Przykład systemu typów — logika pierwszego rzędu

Typy

- $P(t_1, \dots, t_n)$ – formuły atomowe
- $\tau \rightarrow \sigma$, gdzie τ, σ są typami
- $\forall \alpha. \tau$, gdzie α jest zmienną, τ jest typem

Reguły przypisywania typów

$$\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \tau \rightarrow \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \tau}{\Gamma \vdash M : \tau[\alpha := t]}$$

Przykład systemu typów — logika pierwszego rzędu

Typy

- $P(t_1, \dots, t_n)$ – formuły atomowe
- $\tau \rightarrow \sigma$, gdzie τ, σ są typami
- $\forall \alpha. \tau$, gdzie α jest zmienną, τ jest typem

Reguły przypisywania typów

$$\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \tau \rightarrow \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \tau}{\Gamma \vdash M : \tau[\alpha := t]}$$

Problemy w systemach przypisywania typów

Problem typowości ($? \vdash M : ?$)

Dany jest term M . Czy istnieje typ τ i środowisko Γ takie, że $\Gamma \vdash M : \tau$?

Problem sprawdzania typu ($\Gamma \vdash M : \tau ?$)

Dany jest term M , typ τ i środowisko Γ . Czy w rozważanym systemie typów można wyprowadzić $\Gamma \vdash M : \tau$?

Problem niepustości typu ($\vdash ? : \tau$)

Dany jest typ τ . Czy istnieje term M taki, że $\vdash M : \tau$?

Czy są to problemy rozstrzygalne?

Problemy w systemach przypisywania typów

Problem typowości ($? \vdash M : ?$)

Dany jest term M . Czy istnieje typ τ i środowisko Γ takie, że $\Gamma \vdash M : \tau$?

Problem sprawdzania typu ($\Gamma \vdash M : \tau ?$)

Dany jest term M , typ τ i środowisko Γ . Czy w rozważanym systemie typów można wyprowadzić $\Gamma \vdash M : \tau$?

Problem niepustości typu ($\vdash ? : \tau$)

Dany jest typ τ . Czy istnieje term M taki, że $\vdash M : \tau$?

Czy są to problemy rozstrzygalne?

Problemy w systemach przypisywania typów

Problem typowości ($? \vdash M : ?$)

Dany jest term M . Czy istnieje typ τ i środowisko Γ takie, że $\Gamma \vdash M : \tau$?

Problem sprawdzania typu ($\Gamma \vdash M : \tau ?$)

Dany jest term M , typ τ i środowisko Γ . Czy w rozważanym systemie typów można wyprowadzić $\Gamma \vdash M : \tau$?

Problem niepustości typu ($\vdash ? : \tau$)

Dany jest typ τ . Czy istnieje term M taki, że $\vdash M : \tau$?

Czy są to problemy rozstrzygalne?

Problemy w systemach przypisywania typów

Problem typowości ($? \vdash M : ?$)

Dany jest term M . Czy istnieje typ τ i środowisko Γ takie, że $\Gamma \vdash M : \tau$?

Problem sprawdzania typu ($\Gamma \vdash M : \tau ?$)

Dany jest term M , typ τ i środowisko Γ . Czy w rozważanym systemie typów można wyprowadzić $\Gamma \vdash M : \tau$?

Problem niepustości typu ($\vdash ? : \tau$)

Dany jest typ τ . Czy istnieje term M taki, że $\vdash M : \tau$?

Czy są to problemy rozstrzygalne?

Problemy w logice pierwszego rzędu

Problem typowości ($? \vdash M : ?$)

Problem typowości w logice pierwszego rzędu jest **rozstrzygalny**.

Problem sprawdzania typu ($\Gamma \vdash M : \tau ?$)

Problem sprawdzania typu dla logiki pierwszego rzędu był przedmiotem mojej pracy magisterskiej.

Problem niepustości typu ($\vdash ? : \tau$)

Problem niepustości typu w logice pierwszego rzędu jest **nierozstrzygalny**.

Problemy w logice pierwszego rzędu

Problem typowości ($? \vdash M : ?$)

Problem typowości w logice pierwszego rzędu jest **rozstrzygalny**.

Problem sprawdzania typu ($\Gamma \vdash M : \tau ?$)

Problem sprawdzania typu dla logiki pierwszego rzędu był przedmiotem mojej pracy magisterskiej.

Problem niepustości typu ($\vdash ? : \tau$)

Problem niepustości typu w logice pierwszego rzędu jest **nierozstrzygalny**.

Problemy w logice pierwszego rzędu

Problem typowości ($? \vdash M : ?$)

Problem typowości w logice pierwszego rzędu jest **rozstrzygalny**.

Problem sprawdzania typu ($\Gamma \vdash M : \tau ?$)

Problem sprawdzania typu dla logiki pierwszego rzędu był przedmiotem mojej pracy magisterskiej.

Problem niepustości typu ($\vdash ? : \tau$)

Problem niepustości typu w logice pierwszego rzędu jest **nierozstrzygalny**.

Główny wynik

Twierdzenie

Problem sprawdzania typu dla logiki pierwszego rzędu nad sygnaturą bez wieloargumentowych symboli funkcyjnych jest rozstrzygalny.

Dziękuję za uwagę