Mniej naiwna teoria typów

Agnieszka Kozubek

Instytut Informatyki
Uniwersytet Warszawski

Forum Informatyki Teoretycznej
19 kwietnia 2008 r.

O czym będzie?

1. Motywacja
2. Cele projektu
   - Co chcę zrobić?
   - W jaki sposób?
3. Rezultaty
   - Naiwna teoria typów
   - Mniej naiwna teoria typów
   - Aktualne wyniki i dalsze plany

Dlaczego uczymy teorii mnogości?

Dlaczego uczymy teorii mnogości?

- nauczyć języka matematyki
- wprowadzić podstawowe pojęcia matematyczne
- nauczyć ścisłego rozumowania
- ćwiczyć abstrakcyjne myślenie

Dlaczego uczymy teorii mnogości?

Dlaczego uczymy teorii mnogości studentów pierwszego roku?

- nauczyć języka matematyki
- wprowadzić podstawowe pojęcia matematyczne
- nauczyć ścisłego rozumowania
- ćwiczyć abstrakcyjne myślenie

Dlaczego uczymy teorii mnogości?

Dlaczego uczymy teorii mnogości studentów pierwszego roku informatyki?

- nauczyć języka matematyki
- wprowadzić podstawowe pojęcia matematyczne
- nauczyć ścisłego rozumowania
- ćwiczyć abstrakcyjne myślenie

Dlaczego uczymy teorii mnogości?

Dlaczego uczymy teorii mnogości studentów pierwszego roku informatyki?

- nauczyć języka matematyki
- wprowadzić podstawowe pojęcia matematyczne
- nauczyć ścisłego rozumowania
- ćwiczyć abstrakcyjne myślenie

Dlaczego uczymy teorii mnogości?

Dlaczego uczymy teorii mnogości studentów pierwszego roku informatyki?

- nauczyć języka matematyki
- wprowadzić podstawowe pojęcia matematyczne
- nauczyć ścisłego rozumowania
- ćwiczyć abstrakcyjne myślenie

Dlaczego uczymy teorii mnogości?

Dlaczego uczymy teorii mnogości studentów pierwszego roku informatyki?

- nauczyć języka matematyki
- wprowadzić podstawowe pojęcia matematyczne
- nauczyć ścisłego rozumowania
- ćwiczyć abstrakcyjne myślenie

Dlaczego uczymy teorii mnogości?

Dlaczego uczymy teorii mnogości studentów pierwszego roku informatyki?

- nauczyć języka matematyki
- wprowadzić podstawowe pojęcia matematyczne
- nauczyć ścisłego rozumowania
- ćwiczyć abstrakcyjne myślenie

Teoria mnogości dziś

- jest językiem współczesnej matematyki
- powszechnie używana jako podstawa matematyki

Nie po to powstała!

Teoria mnogości dziś

- jest językiem współczesnej matematyki
- powszechnie używana jako podstawa matematyki

Nie po to powstała!

Teoria mnogości dziś

- jest językiem współczesnej matematyki
- powszechnie używana jako podstawa matematyki

Nie po to powstała!

Początki teorii mnogości

- paradoksy w naiwnej teorii mnogości
- pytania o niesprzeczność matematyki (początek XX wieku)
- aksjomatyczna teoria mnogości
- powstała jako podstawa matematyki

Początki teorii mnogości

- paradoksy w naiwnej teorii mnogości
- pytania o niesprzeczność matematyki (początek XX wieku)
- aksjomatyczna teoria mnogości
- powstała jako podstawa matematyki

Początki teorii mnogości

- paradoksy w naiwnej teorii mnogości
- pytania o niesprzeczność matematyki (początek XX wieku)
- aksjomatyczna teoria mnogości
- powstała jako podstawa matematyki

Początki teorii mnogości

- paradoksy w naiwnej teorii mnogości
- pytania o niesprzeczność matematyki (początek XX wieku)
- aksjomatyczna teoria mnogości
- powstała jako podstawa matematyki

Cena niesprzeczności

Niskopoziomowa implementacja prostych pojęć

- $7 = 5 \cup \{5, 6\}$
- $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- $[a]_r = \{b \mid \langle a, b\rangle \in r\}$

Implementacja przysłania specyfikację

Cena niesprzeczności

Niskopoziomowa implementacja prostych pojęć

- $7 = 5 \cup \{5, 6\}$
- $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- $[a]_r = \{b \mid \langle a, b\rangle \in r\}$

Implementacja przysłania specyfikację

Skąd się biorą paradoksy w naiwnej teorii mnogości?

Teoria mnogości skleja dwa pojęcia:

- zbiór jako uniwersum
- zbiór jako materalizacja predykatu

Tworzenie dowolnych zbiorów prowadzi do paradoksów.

Aksjomat wycinania

Zamiast $\{x \mid W(x)\}$ mamy $\{x \in A \mid W(x)\}$.

Skąd się biorą paradoksy w naiwnej teorii mnogości?

Teoria mnogości skleja dwa pojęcia:

- zbiór jako uniwersum
- zbiór jako materalizacja predykatu

Tworzenie dowolnych zbiorów prowadzi do paradoksów.

Aksjomat wycinania

Zamiast $\{x \mid W(x)\}$ mamy $\{x \in A \mid W(x)\}$.

Co chcę zrobić?

- rozwinąć teorię, w której można uprawiać matematykę (elementarną)
- użyteczna w nauczaniu podstaw matematyki
- rozróżnia uniwersum od predykatu
- bez sztucznych kodowań
- intensjonalne specyfikacje zamiast dowodliwych własności
- oparta na teorii typów

Co chcę zrobić?

- rozwinąć teorię, w której można uprawiać matematykę (elementarną)
- użyteczna w nauczaniu podstaw matematyki
- rozróżnia uniwersum od predykatu
- bez sztucznych kodowań
- intensjonalne specyfikacje zamiast dowodliwych własności
- oparta na teorii typów

Co chcę zrobić?

- rozwinąć teorię, w której można uprawiać matematykę (elementarną)
- użyteczna w nauczaniu podstaw matematyki
- rozróżnia uniwersum od predykatu
- bez sztucznych kodowań
- intensjonalne specyfikacje zamiast dowodliwych własności
- oparta na teorii typów

Co chcę zrobić?

- rozwinąć teorię, w której można uprawiać matematykę (elementarną)
- użyteczna w nauczaniu podstaw matematyki
- rozróżnia uniwersum od predykatu
- bez sztucznych kodowań
- intensjonalne specyfikacje zamiast dowodliwych własności
- oparta na teorii typów

Co chcę zrobić?

- rozwinąć teorię, w której można uprawiać matematykę (elementarną)
- użyteczna w nauczaniu podstaw matematyki
- rozróżnia uniwersum od predykatu
- bez sztucznych kodowań
- intensjonalne specyfikacje zamiast dowodliwych własności
- oparta na teorii typów

Co chcę zrobić?

- rozwinąć teorię, w której można uprawiać matematykę (elementarną)
- użyteczna w nauczaniu podstaw matematyki
- rozróżnia uniwersum od predykatu
- bez sztucznych kodowań
- intensjonalne specyfikacje zamiast dowodliwych własności
- oparta na teorii typów

Dlaczego teoria typów?

- naturalne pojęcie typu (uniwersum)
- łatwe rozróżnienie typu (uniwersum) i predykatu (podzbioru)
- aksjomatycznie zadane intensjonalne specyfikacje
- syntaktyczna, umożliwia automatyczną weryfikację rozumowania
- powszechnie używana do formalizacji matematyki

Dlaczego teoria typów?

- naturalne pojęcie typu (uniwersum)
- łatwe rozróżnienie typu (uniwersum) i predykatu (podzbioru)
- aksjomatycznie zadane intensjonalne specyfikacje
- syntaktyczna, umożliwia automatyczną weryfikację rozumowania
- powszechnie używana do formalizacji matematyki

Dlaczego teoria typów?

- naturalne pojęcie typu (uniwersum)
- łatwe rozróżnienie typu (uniwersum) i predykatu (podzbioru)
- aksjomatycznie zadane intensjonalne specyfikacje
- syntaktyczna, umożliwia automatyczną weryfikację rozumowania
- powszechnie używana do formalizacji matematyki

Dlaczego teoria typów?

- naturalne pojęcie typu (uniwersum)
- łatwe rozróżnienie typu (uniwersum) i predykatu (podzbioru)
- aksjomatycznie zadane intensjonalne specyfikacje
- syntaktyczna, umożliwia automatyczną weryfikację rozumowania
- powszechnie używana do formalizacji matematyki

Dlaczego teoria typów?

- naturalne pojęcie typu (uniwersum)
- łatwe rozróżnienie typu (uniwersum) i predykatu (podzbioru)
- aksjomatycznie zadane intensjonalne specyfikacje
- syntaktyczna, umożliwia automatyczną weryfikację rozumowania
- powszechnie używana do formalizacji matematyki

PTS (Pure Type Systems)

- baza dla teorii typów
- współczesny formalizm do definiowania teorii typów
- ułatwia porównywanie systemów typów
- parametryczny
- opisuje jakie konstrukcje są dopuszczalne

PTS (Pure Type Systems)

- baza dla teorii typów
- współczesny formalizm do definiowania teorii typów
- ułatwia porównywanie systemów typów
- parametryczny
- opisuje jakie konstrukcje są dopuszczalne

PTS (Pure Type Systems)

- baza dla teorii typów
- współczesny formalizm do definiowania teorii typów
- ułatwia porównywanie systemów typów
- parametryczny
- opisuje jakie konstrukcje są dopuszczalne

PTS (Pure Type Systems)

- baza dla teorii typów
- współczesny formalizm do definiowania teorii typów
- ułatwia porównywanie systemów typów
- parametryczny
- opisuje jakie konstrukcje są dopuszczalne

PTS (Pure Type Systems)

- baza dla teorii typów
- współczesny formalizm do definiowania teorii typów
- ułatwia porównywanie systemów typów
- parametryczny
- opisuje jakie konstrukcje są dopuszczalne

Naiwna teoria typów

- pierwsza próba stworzenia systemu bazowego
- pewien szczególny PTS
- interesujący z technicznego punktu widzenia
- zbiór i jego zbiór potęgowy na tym samym poziomie

System jest SPRZECZNY!

W naiwnej teorii typów występuje paradoks Girarda

Naiwna teoria typów

- pierwsza próba stworzenia systemu bazowego
- pewien szczególny PTS
- interesujący z technicznego punktu widzenia
- zbiór i jego zbiór potęgowy na tym samym poziomie

System jest SPRZECZNY!

W naiwnej teorii typów występuje paradoks Girarda

Naiwna teoria typów

- pierwsza próba stworzenia systemu bazowego
- pewien szczególny PTS
- interesujący z technicznego punktu widzenia
- zbiór i jego zbiór potęgowy na tym samym poziomie

System jest SPRZECZNY!

W naiwnej teorii typów występuje paradoks Girarda

Naiwna teoria typów

- pierwsza próba stworzenia systemu bazowego
- pewien szczególny PTS
- interesujący z technicznego punktu widzenia
- zbiór i jego zbiór potęgowy na tym samym poziomie

System jest SPRZECZNY!

W naiwnej teorii typów występuje paradoks Girarda

Naiwna teoria typów

- pierwsza próba stworzenia systemu bazowego
- pewien szczególny PTS
- interesujący z technicznego punktu widzenia
- zbiór i jego zbiór potęgowy na tym samym poziomie

System jest SPRZECZNY!

W naiwnej teorii typów występuje paradoks Girarda

Naiwna teoria typów

- pierwsza próba stworzenia systemu bazowego
- pewien szczególny PTS
- interesujący z technicznego punktu widzenia
- zbiór i jego zbiór potęgowy na tym samym poziomie

System jest SPRZECZNY!

W naiwnej teorii typów występuje paradoks Girarda

Mniej naiwna teoria typów

- poprawiona wersja naiwnej teorii typów
- moralnie równoważna naiwnej teorii typów
- rozróżnienie na świat logiki i świat obiektów
- podobieństwo do systemu Coq (Prop i Set)

System jest NIESPRZECZNY!

Twierdzenie (Kozubek, 2007)

Mniej naiwna teoria typów ma własność silnej normalizacji.

Mniej naiwna teoria typów

- poprawiona wersja naiwnej teorii typów
- moralnie równoważna naiwnej teorii typów
- rozróżnienie na świat logiki i świat obiektów
- podobieństwo do systemu Coq (Prop i Set)

System jest NIESPRZECZNY!

Twierdzenie (Kozubek, 2007)

Mniej naiwna teoria typów ma własność silnej normalizacji.

Mniej naiwna teoria typów

- poprawiona wersja naiwnej teorii typów
- moralnie równoważna naiwnej teorii typów
- rozróżnienie na świat logiki i świat obiektów
- podobieństwo do systemu Coq (Prop i Set)

System jest NIESPRZECZNY!

Twierdzenie (Kozubek, 2007)

Mniej naiwna teoria typów ma własność silnej normalizacji.

Mniej naiwna teoria typów

- poprawiona wersja naiwnej teorii typów
- moralnie równoważna naiwnej teorii typów
- rozróżnienie na świat logiki i świat obiektów
- podobieństwo do systemu Coq (Prop i Set)

System jest NIESPRZECZNY!

Twierdzenie (Kozubek, 2007)

Mniej naiwna teoria typów ma własność silnej normalizacji.

Mniej naiwna teoria typów

- poprawiona wersja naiwnej teorii typów
- moralnie równoważna naiwnej teorii typów
- rozróżnienie na świat logiki i świat obiektów
- podobieństwo do systemu Coq (Prop i Set)

System jest NIESPRZECZNY!

Twierdzenie (Kozubek, 2007)

Mniej naiwna teoria typów ma własność silnej normalizacji.

Mniej naiwna teoria typów

- poprawiona wersja naiwnej teorii typów
- moralnie równoważna naiwnej teorii typów
- rozróżnienie na świat logiki i świat obiektów
- podobieństwo do systemu Coq (Prop i Set)

System jest NIESPRZECZNY!

Twierdzenie (Kozubek, 2007)

Mniej naiwna teoria typów ma własność silnej normalizacji.

Podsumowanie

System bazowy

- niesprzeczność
- tworzenie przestrzeni fukncyjnej
- implikacja i kwantyfikator uniwersalny
- tworzenie podzbiorów

Już jest

- rachunek zbiorów
- logika wyższego rzędu
- wszystkie spójniki logiczne, kwantyfikator egzystencjalny

Podsumowanie

System bazowy

- niesprzeczność
- tworzenie przestrzeni fukncyjnej
- implikacja i kwantyfikator uniwersalny
- tworzenie podzbiorów

Już jest

- rachunek zbiorów
- logika wyższego rzędu
- wszystkie spójniki logiczne, kwantyfikator egzystencjalny

Podsumowanie

System bazowy

- niesprzeczność
- tworzenie przestrzeni fukncyjnej
- implikacja i kwantyfikator uniwersalny
- tworzenie podzbiorów

Już jest

- rachunek zbiorów
- logika wyższego rzędu
- wszystkie spójniki logiczne, kwantyfikator egzystencjalny

Podsumowanie

Będzie (mam nadzieję) wkrótce

Typy indukcyjne:

- liczby naturalne,
- produkt kartezjański typów,
- suma rozłączna typów,
- drzewa,
- ...

Pozostaje do zrobienia

Równość, arytmetyka, relacje równoważności, ilorazy, ...

Podsumowanie

Będzie (mam nadzieję) wkrótce

Typy indukcyjne:

- liczby naturalne,
- produkt kartezjański typów,
- suma rozłączna typów,
- drzewa,
- ...

Pozostaje do zrobienia

Równość, arytmetyka, relacje równoważności, ilorazy, ...

Podsumowanie

Będzie (mam nadzieję) wkrótce

Typy indukcyjne:

- liczby naturalne,
- produkt kartezjański typów,
- suma rozłączna typów,
- drzewa,
- ...

Pozostaje do zrobienia

Równość, arytmetyka, relacje równoważności, ilorazy, ...

Dziekuję za uwagę