Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Agnieszka Kozubek
Nr albumu: 197879

Wymiar Goldiego w kratach

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Jerzego Matczuka
Instytut Matematyki

Maj 2007

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W pracy przedstawiono pojęcie wymiaru Goldiego i dualnego wymiaru Goldiego dla krat modularnych. Pojęcie to historycznie wywodzi się z wymiaru Goldiego dla modułów i prób zrozumienia natury dualnego wymiaru Goldiego dla modułów. Jak się okazuje, język krat modularnych jest właściwym językiem do wyrażenia tych pojęć. Praca przedstawia motywacje prowadzące do wprowadzenia wymiaru Goldiego dla krat oraz jego zastosowanie do wyjaśnienia natury dualnego wymiaru Goldiego dla modułów.

Słowa kluczowe

kraty, kraty modularne, moduły, wymiar Goldiego, dualny wymiar Goldiego

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

06C05 Modular lattices, Desarguesian lattices
13C15 Dimension theory, depth, related rings (catenary, etc.)

Tytuł pracy w języku angielskim

On Goldie dimension of lattices

Spis treści

Wstęp

Celem tej pracy jest pokazanie, że język krat może być dobrym narzędziem do mówienia o zjawiskach dziejących się w modułach. Historyczny rozwój pojęcia wymiaru Goldiego dla krat i dualnego wymiaru Goldiego dla jest bardzo dobrą ilustracją tego faktu. Wymiar dla krat wywodzi się z wymiaru Goldiego dla modułów oraz prób zrozumienia pojęcia dualnego wymiaru Goldiego dla modułów. Jak się okazuje, właściwym sposobem patrzenia na ten wymiar jest bardziej abstrakcyjny poziom krat. Spojrzenie kratowe pozwala dobrze wyjaśnić zjawiska, które sformułowane w języku modułów są niejasne i nieintuicyjne. W pracy przedstawiamy cztery blisko ze sobą powiązane pojęcia: wymiar Goldiego dla modułów, dualny wymiar Goldiego dla modułów oraz wymiar i dualny wymiar Goldiego dla krat modularnych. Analizujemy związki między tymi pojęciami. Pokazujemy, w jaki sposób wprowadzenie wymiaru dla krat pozwala we właściwy sposób sformułować definicję dualnego wymiaru Goldiego dla modułów.

Historycznie, najstarszym pojęciem jest wymiar Goldiego dla modułów. Został wprowadzony przez Goldiego w [2]. Z upływem czasu podejmowano próby zdefiniowania dualnego wymiaru Goldiego dla modułów. Przegląd tych prób zawiera praca Lompa [5]. Jedną z najwcześniejszych prób jest praca Fleury'ego [1]. Kolejne próby pochodzą od Takeuchiego [8], Varadarajana [9] i Reitera [7]. Dość łatwo jest zauważyć, że definicje Takeuchiego i Reitera są równoważne. Związek ich definicji z innymi definicjami był jednak niejasny. W 1984 roku Grzeszczuk i Puczyłowski w pracy [3] wprowadzili wymiar Goldiego dla krat modularnych oraz, co w teorii krat jest bardzo naturalne, jego wersję dualną. Autorzy zastosowali otrzymane pojęcia do kraty podmodułów i pokazali, że wymiar Goldiego dla modułów można zdefiniować jako wymiar Goldiego dla kraty podmodułów. Język krat okazał się być wygodny do porównania różnych definicji dualnego wymiaru Goldiego — z tej perspektywy jest jasne, że definicje Reitera, Takeuchiego i Varadarajana są równoważne.

Praca składa się z trzech rozdziałów. Staraliśmy się naśladować historyczny rozwój pojęcia wymiaru Goldiego dla krat. W rozdziale pierwszym zajmujemy się pojęciem wymiaru Goldiego dla modułów. Wprowadzamy podstawowe informacje o modułach wraz z przykładami prezentującymi przedstawiane pojęcia, definiujemy wymiar w języku modułów i dowodzimy poprawności definicji. Liczymy wymiar Goldiego dla kilku wybranych modułów oraz charakteryzujemy moduły o skończonym wymiarze Goldiego. Następnie przedstawiamy różne podejścia do zagadnienia dualnego wymiaru Goldiego dla modułów.

Rozdział drugi poświęcony jest wymiarowi Goldiego w kratach modularnych. Przedstawiamy podstawowe wiadomości na temat krat modularnych oraz pojęcie wymiaru Goldiego dla krat i ilustrujemy je kilkoma przykładami. Pokazujemy, w jaki sposób definiuje się pojęcie dualnego wymiaru Goldiego dla krat.

Rozdział trzeci jest analizą związków między wymiarem dla modułów i wymiarem dla krat. Wyrażamy kratowe pojęcia wprowadzone w rozdziale drugim w języku modułów i okazuje się, że pokrywają się one z pojęciami dla modułów zdefiniowanymi w rozdziale pierwszym, zaś wymiar Goldiego dla modułu to dokładnie wymiar Goldiego kraty jego podmodułów. Następnie analizujemy, co oznacza pojęcie dualnego wymiar Goldiego dla krat wyrażone w języku modułów i jak ma się otrzymane pojęcie do różnych prób dualizacji przedstawionych w rozdziale pierwszym. W języku krat różne próby dualizacji wymiaru dla modułów stają się zrozumiałe, a na gruncie wyników przedstawionych w rozdziale drugim równoważność tych definicji jest prawie oczywista.

Rozdział 1

Wymiar Goldiego dla modułów

1.1. Wiadomości o modułach

W tym podrozdziale przedstawimy pojęcie modułu oraz podstawowe definicje i fakty z nim związane. Ta część pracy ma przede wszystkim na celu ustalenie języka oraz notacji używanych w następnych podrozdziałach, jednakże wprowadzane pojęcia ilustrujemy kilkoma przykładami.

Definicja 1.1.1. *Modułem lewostronnym nad pierścieniem* R (albo R-modułem) nazywamy grupę abelową M wraz z działaniem mnożenia $\cdot : R \times M \to M$ elementów modułu M przez elementy pierścienia R (zamiast $r \cdot n$ piszemy rn) takim, że dla dowolnych a, $b \in R$ oraz x, $y \in M$ spełnione są warunki

- $(a+b)x = ax + bx$,
- $a(x+y) = ax + ay$,
- $(ab)x = a(bx)$,
- $1x = x$.

Podobnie określa się moduł prawostronny nad pierścieniem R. Będziemy mieli do czynienia jedynie z modułami lewostronnymi i dlatego będziemy je nazywali po prostu *modułami nad pierścieniem* R lub, jeśli z kontekstu wynika, o jaki pierścień chodzi, po prostu *modułami.* Wszystkie przedstawione definicje i twierdzenia można w analogiczny sposób sformułować dla modułów prawostronnych.

Pokażemy kilka przykładów modułów. Na początek zobaczmy najprostszy możliwy przykład modułu.

Przykład 1.1.2. Pierścień R jest modułem nad samym sobą.

Jak pokazuje kilka następnych przykładów, pojęcie modułu jest bardzo szerokie, obejmuje bardzo podstawowe struktury algebraiczne.

Przykład 1.1.3. Dowolna grupa abelowa G jest $\mathbb{Z}$-modułem. Działanie mnożenia elementów grupy G przez elementy pierścienia $\mathbb{Z}$ określamy następująco: dla $g \in G$ oraz $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $0g = 0$, $1g = g$, $(n+1)g = ng + g$, $(-n)g = -(ng)$.

Przykład 1.1.4. Przestrzeń liniowa V nad ciałem K jest modułem nad pierścieniem K.

Można znaleźć także ciekawsze przykłady modułów.

Przykład 1.1.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, a $\varphi : V \to V$ przekształceniem liniowym. Wtedy V jest modułem nad pierścieniem $K[x]$ z działaniem $(\Sigma_{0\leqslant k\leqslant n} a_k x^k)v = \Sigma_{0\leqslant k\leqslant n} a_k \varphi^k(v)$. Moduł ten będziemy oznaczać przez V_φ.

Przykład 1.1.6. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $R = \mathrm{End}_K(V)$ będzie pierścieniem endomorfizmów przestrzeni V. Wtedy V jest modułem nad pierścieniem R z działaniem mnożenia określonym następująco: dla $v \in V$ i $\varphi \in R$ definiujemy $\varphi \cdot v = \varphi(v)$.

Pojęcie podmodułu definiujemy w naturalny sposób.

Definicja 1.1.7. Niech M będzie modułem nad pierścieniem R. *Podmodułem* N modułu M nazywamy podzbiór $N \subseteq M$ taki, że dla dowolnych elementów x, $y \in N$ i $r \in R$ zachodzi $x + y \in N$ oraz $rx \in N$.

Na początku pokażemy kilka trywialnych przykładów podmodułów.

Przykład 1.1.8. Podgrupa $\{0\}$ jest podmodułem każdego R-modułu M. Będziemy go oznaczać przez 0 i nazywać *modułem zerowym.*

Przykład 1.1.9. Każdy moduł M jest swoim własnym podmodułem.

Podmodułami właściwymi będziemy nazywać podmoduły różne od modułu M i od modułu zerowego.

Pojęcie podmodułu w znanych strukturach algebraicznych często pokrywa się z pojęciem właściwym dla niej pojęciem podstruktury.

Przykład 1.1.10. Niech M będzie $\mathbb{Z}$-modułem. Podmoduły modułu M to dokładnie podgrupy grupy M.

Przykład 1.1.11. Podmodułami w przestrzeni liniowej V nad ciałem K są podprzestrzenie liniowe przestrzeni V.

Zobaczmy teraz bardziej interesujące przykłady podmodułów. Pokazują one, że w języku podmodułów można wyrazić pojęcia znane z innych działów matematyki.

Przykład 1.1.12. Podmoduły modułu V_φ to podprzestrzenie niezmiennicze przy przekształceniu φ, to znaczy takie podprzestrzenie liniowe $W \subseteq V$, że $\varphi(W) \subseteq W$.

Przykład 1.1.13. Rozważmy moduł V z przykładu 1.1.6. W tym module nie ma właściwych podmodułów. Weźmy bowiem dwa dowolne niezerowe wektory $v, w \in V$. Wówczas istnieje przekształcenie liniowe $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ takie, że $\varphi(v) = w$. To znaczy, że $\varphi \cdot v = w$, a zatem w należy do każdego podmodułu zawierającego v. Z dowolności wyboru v i w otrzymujemy, że rzeczywiście w V nie ma właściwych podmodułów.

Łatwo jest sprawdzić, że jeśli K i N są podmodułami R-modułu M, to także $K \cap N$ jest podmodułem modułu M. Mając dane dwa podmoduły, można także szukać podmodułu zawierającego oba z nich. Przykładem takiego podmodułu jest suma modułów, którą definiuje się w następujący sposób.

Definicja 1.1.14. Niech K i N będą podmodułami R-modułu M. *Sumą* modułów K i N, którą będziemy oznaczać $K + N$, nazywamy zbiór wszystkich elementów postaci $k + n$, gdzie $k \in K$ i $n \in N$. Dla każdych dwóch podmodułów K i N modułu M suma $K + N$ także jest podmodułem modułu M.

Niektóre sumy podmodułów są pewnej szczególnej postaci.

Definicja 1.1.15. Niech K i N będą podmodułami R-modułu M. Sumę $K + N$ nazywamy *prostą* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element z sumy $K + N$ przedstawia się w sposób jednoznaczny jako w postaci $k + n$, gdzie $k \in K$ i $n \in N$. Sumę prostą podmodułów K i N będziemy oznaczać przez $K \oplus N$.

Nowe przykłady modułów można tworzyć posługując się konstrukcją ilorazową.

Definicja 1.1.16. Niech M będzie modułem nad pierścieniem R, a N jego podmodułem. Można określić operację mnożenia na grupie ilorazowej M/N w następujący sposób: dla $r \in R$ oraz $x \in M$ definiujemy $r(x + N) = rx + N$. Zbiór M/N z tak zdefiniowanym mnożeniem jest modułem nad pierścieniem R. Będziemy nazywać ten moduł *modułem ilorazowym.*

Jak można się domyślić, dla znanych struktur algebraicznych, pojęcie modułu ilorazowego pokrywa się z właściwą dla tej struktury konstrukcją ilorazową.

Przykład 1.1.17. Jeśli M jest $\mathbb{Z}$-modułem, N jest podmodułem modułu M, to moduł ilorazowy M/N to dokładnie grupa ilorazowa M/N z działaniem mnożenia określonym następująco $n(x + N) = nx + N$.

Przykład 1.1.18. Jeśli V jest podprzestrzenią liniową nad ciałem K, zaś W jest jej podprzestrzenią, to moduł V/W jest izomorficzny z przestrzenią ilorazową V/W.

Definicja 1.1.19. Niech M, N będą dwoma modułami nad pierścieniem R. Funkcję $f : M \to N$ nazywamy *homomorfizmem modułów* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in M$, $a \in R$ zachodzą równości $f(x + y) = f(x) + f(y)$ oraz $f(ax) = af(x)$.

Zacznijmy od dwóch bardzo łatwych przykładów homomorfizmów.

Przykład 1.1.20. Dla dowolnych modułów M, N nad pierścieniem R odwzorowane zerowe $f : M \to N$ dane wzorem $f(m) = 0$ jest homomorfizmem modułów.

Przykład 1.1.21. Dla dowolnego R-modułu M odwzorowanie identycznościowe $\mathrm{id} : M \to M$ dane wzorem $\mathrm{id}(m) = m$ jest homomorfizmem modułów.

Na koniec zobaczmy dwa często używane homomorfizmy.

Przykład 1.1.22. Niech N będzie podmodułem R-modułu M. Naturalne rzutowanie $\pi : M \to M/N$ dane wzorem $\pi(x) = x + N$ jest homomorfizmem modułów.

Przykład 1.1.23. Niech M będzie R-modułem i niech K i N będą jego dwoma podmodułami takimi, że $M = K \oplus N$. Odwzorowanie $f : M \to K$ dane wzorem $f(k + n) = k$ nazywamy *rzutem* na moduł K wzdłuż modułu N. Odwzorowanie f jest homomorfizmem podmodułów.

1.2. Definicja wymiaru Goldiego dla modułów

W tej części pracy zajmiemy się przedstawieniem wymiaru Goldiego dla modułów. Jest to rozszerzenie dobrze znanego pojęcia wymiaru przestrzeni liniowej na moduły, wymiar Goldiego przestrzeni liniowej jest równy jej wymiarowi liniowemu. Przedstawimy definicję wymiaru Goldiego dla modułów oraz podamy kilka przykładów.

Definicja 1.2.1. Moduł $N \subseteq M$ jest *istotnym* podmodułem R-modułu M, jeśli każdy niezerowy podmoduł M przecina N w sposób nietrywialny. W tym przypadku mówimy także, że M jest *istotnym rozszerzeniem* podmodułu N.

Przykład 1.2.2. Każdy moduł jest swoim istotnym podmodułem.

Przykład 1.2.3. Rozważmy przestrzeń liniową V nad ciałem K. Podmoduły V to podprzestrzenie liniowe V. Załóżmy, że $\dim V > 1$ i niech $0 \neq W \neq V$ będzie podprzestrzenią liniową V. Skoro $\dim V > 1$, to takie W istnieje. Niech $v \in V \setminus W$. Wówczas $W \cap \mathrm{lin}(v) = 0$. Zatem w przestrzeni liniowej wymiaru większego niż 1 nie ma właściwych podmodułów istotnych.

Przykład 1.2.4. Rozważmy moduł V_φ z Przykładu 1.1.12. Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem algebraicznie domkniętym. Niech $\widehat{V}$ oznacza przestrzeń liniową rozpiętą na zbiorze wszystkich wektorów własnych przekształcenia φ. Wówczas $\widehat{V}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, a zatem podmodułem modułu V_φ. Pokażemy, że podprzestrzeń W jest podmodułem istotnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\widehat{V} \subseteq W$.

Niech W będzie podmodułem moduł V_φ takim, że $\widehat{V} \subseteq W$ i niech W' będzie dowolną podprzestrzenią φ-niezmienniczą (a zatem dowolnym podmodułem modułu V_φ). Rozważmy obcięcie przekształcenia φ do przestrzeni W' $\varphi|_{W'} : W' \to W'$. Z twierdzenia Jordana wynika, że macierz przekształcenia $\varphi|_{W'}$ ma postać Jordana. W szczególności zatem istnieje wektor własny $v \in W'$, czyli $W' \cap V_\varphi \neq 0$, a zatem także $W' \cap W \neq 0$. Podprzestrzeń W rzeczywiście jest podmodułem istotnym.

Przypuśćmy teraz, że $\widehat{V} \not\subseteq W$. Wtedy istnieje wektor własny w taki, że $w \notin W$. Wówczas $\mathrm{lin}(w)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą, a zatem V_φ-modułem. Wówczas jednak $W \cap \mathrm{lin}(w) = 0$, a zatem W nie jest podmodułem istotnym.

Przykład 1.2.5. Wszystkie podmoduły $\mathbb{Z}$-modułu $\mathbb{Z}$ są postaci $\mathbb{Z}n$ dla pewnego n. Zauważmy jednak, że $nm \in \mathbb{Z}n \cap \mathbb{Z}m$, zatem każde dwa niezerowe podmoduły przecinają się nietrywialnie. W $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ każdy podmoduł jest istotny.

Przykład 1.2.6. Rozważmy $\mathbb{Z}$-moduł $\mathbb{Z}_{p^n}$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Wszystkie jego podmoduły są postaci $\mathbb{Z}_{p^k}$ dla pewnego k i tworzą one łańcuch $0 \subseteq \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_{p^2} \subseteq \ldots$. Każde dwa niezerowe podmoduły $\mathbb{Z}_{p^n}$ przecinają się nietrywialnie, zatem każdy niezerowy podmoduł jest istotny.

Aby pokazać jeszcze jeden przykład, będziemy potrzebowali kilku własności charakteryzujących podmoduły istotne.

Uwaga 1.2.7.
1. Niech $M \subseteq E$ będą R-modułami. Jeżeli dla każdego niezerowego $a \in E$ istnieje $r \in R$ takie, że $0 \neq ra \in M$, to M jest istotnym podmodułem E.
2. Niech $M \subseteq E \subseteq E'$ będą R-modułami. Jeśli M jest istotnym podmodułem E oraz E jest istotnym podmodułem E', to M jest istotnym podmodułem E.

Dowód. 1. Załóżmy, że dla każdego niezerowego $a \in E$ istnieje $r \in R$ takie, że $0 \neq ra \in M$. Pokażemy, że wtedy M jest istotnym podmodułem E. Niech N będzie dowolnym podmodułem E i niech $a \in N$ będzie jego dowolnym elementem. Wtedy także $a \in E$. Z założenia istnieje $r \in R$ takie, że $0 \neq ar \in M$. Jednak N jest modułem, zatem także $ar \in N$. Czyli $0 \neq ra \in N \cap M$, zatem istotnie N i M mają nietrywialne przecięcie.

2. Korzystamy z punktu (1). Niech $a \in E'$. Ponieważ E jest istotnym podmodułem E', to istnieje $r' \in R$ takie, że $0 \neq r'a \in E$. Ponadto M jest istotnym podmodułem E, zatem istnieje $r \in R$ takie, że $0 \neq rr'a \in M$. Ponieważ $rr' \in R$, zatem rzeczywiście M jest istotnym podmodułem E'.

$\square$

Lemat 1.2.8. *Niech $\{E_j\}_{j\in J}$ będą R-modułami, zaś $M_j \subseteq E_j$ będą podmodułami E_j, dla każdego $j \in J$. Wówczas $\bigoplus_{j\in J} M_j$ jest istotnym podmodułem $\bigoplus_{j\in J} E_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego j moduł M_j jest istotnym podmodułem E_j.*

Dowód. Jest oczywiste, że jeśli $\bigoplus_{j\in J} M_j$ jest istotnym podmodułem $\bigoplus_{j\in J} E_j$, to dla każdego $j \in J$ moduł M_j jest istotnym podmodułem E_j.

Udowodnimy teraz, że zachodzi implikacja przeciwna. Załóżmy, że dla każdego $j \in J$ moduł M_j jest istotnym podmodułem E_j. Aby pokazać, że $\bigoplus_{j\in J} M_j$ jest istotnym podmodułem $\bigoplus_{j\in J} E_j$ skorzystamy z Uwagi 1.2.7 (1). Niech a będzie dowolnym elementem podmodułu $\bigoplus_{j\in J} E_j$. Wówczas istnieje skończenie wiele elementów $a_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in E_{i_n}$ takich, że $a = a_{i_1} + \ldots + a_{i_n}$. Chcemy znaleźć element $r \in R$ taki, że $ra \in \bigoplus_{j\in J} M_j$. Z założenia, że M_{i_1} jest istotnym podmodułem modułu E_{i_1} oraz Uwagi 1.2.7 (1) istnieje element $r_1 \in R$ taki, że $r_1 a_1 \in M_{i_1}$. Wówczas $r_1 a_2 \in E_{i_2}$ i założenia o istotności modułu M_{i_2} w module E_{i_2} znajdziemy element $r_2 \in R$ taki, że $r_2 r_1 a_{i_2} \in M_{i_2}$. Oczywiście wtedy $r_2 r_1 a_{i_1} \in M_{i_1}$, bo M_{i_1} jest podmodułem. Kontynuując tę konstrukcję znajdziemy elementy $r_1, \ldots, r_n$ takie, że $r_n \ldots r_1 a_{i_j} \in M_{i_j}$. Zdefiniujmy zatem $r = r_n \ldots r_1$. Wówczas $ra \in \bigoplus_{j\in J} M_j$, a zatem rzeczywiście $\bigoplus_{j\in J} M_j$ jest istotnym podmodułem $\bigoplus_{j\in J} E_j$. $\square$

Przykład 1.2.9. Weźmy dowolną skończoną grupę abelową G. Wtedy G jest $\mathbb{Z}$-modułem. Jak wiadomo G jest izomorficzne z sumą prostą $\mathbb{Z}_{{p_1}^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{{p_n}^{k_n}}$, gdzie p_i są niekoniecznie różnymi liczbami pierwszymi. Korzystając z Lematu 1.2.8 oraz Przykładu 1.2.6 łatwo zauważyć, że każdy moduł postaci $\mathbb{Z}_{{p_1}^{m_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{{p_n}^{m_n}}$, gdzie $0 < m_1 \leqslant k_1, \ldots, 0 < m_n \leqslant k_n$, jest istotny w G.

Definicja 1.2.10. Niezerowy R-moduł M nazywamy *jednolitym* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy podmoduł M jest istotny w M.

Przykład 1.2.11. W jednowymiarowej przestrzeni liniowej nie ma nietrywialnych podmodułów. Zatem każda jednowymiarowa przestrzeń liniowa jest jednolita. Z drugiej strony, jak pokazuje Przykład 1.2.3 w przestrzeni liniowej wymiaru większego niż 1, nie ma żadnych właściwych podmodułów istotnych, zatem taka przestrzeń nie jest jednolita.

Przykład 1.2.12. Jak pokazano w Przykładzie 1.2.5 $\mathbb{Z}$-moduł $\mathbb{Z}$ jest jednolity.

Przykład 1.2.13. Przykład 1.2.6 pokazuje, że $\mathbb{Z}$-moduł $\mathbb{Z}_{p^n}$ jest jednolity.

Przykład 1.2.14. Jak wiemy z Przykładu 1.1.13 podmoduł z Przykładu 1.1.6 nie ma właściwych podmodułów. Zatem jest to podmoduł jednolity.

Przykład 1.2.15. Rozważmy $\mathbb{Z}$-moduł $\mathbb{Z}_m$, gdzie m jest liczbą złożoną podzielną przez dwie różne liczby pierwsze p i q. Wtedy $\mathbb{Z}_p$ oraz $\mathbb{Z}_q$ są podmodułami $\mathbb{Z}_m$, jednak $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Z}_q = 0$. Zatem moduł $\mathbb{Z}_m$ nie jest jednolity.

Przykład 1.2.16. Rozważmy moduł V_φ z Przykładu 1.1.12. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem algebraicznie domkniętym, podobnie jak w Przykładzie 1.2.4. Jak wynika z Przykładu 1.2.4 podmoduł W modułu V_φ jest istotny wtedy i tylko wtedy, gdy W zawiera podprzestrzeń $\widehat{V}$ rozpiętą przez zbiór wszystkich wektorów własnych przekształcenia φ. Z drugiej strony, jeśli podprzestrzeń $\widehat{V}$ ma wymiar większy niż 1, to w V istnieją liniowo niezależne wektory własne v_1, v_2. Wtedy $\operatorname{lin}(v_1)$ oraz $\operatorname{lin}(v_2)$ są podprzestrzeniami φ-niezmienniczymi oraz $\operatorname{lin}(v_1) \cap \operatorname{lin}(v_2) = 0$, zatem moduł V_φ nie jest jednolity. Jeśli podprzestrzeń $\widehat{V}$ ma wymiar równy 1, to jak pokazano w Przykładzie 1.2.4 każda podprzestrzeń φ-niezmiennicza ma z $\widehat{V}$ nietrywialne przecięcie. Zatem moduł V_φ jest jednolity wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń $\widehat{V}$ jest jednowymiarowa, co oznacza, że macierz przekształcenia φ jest podobna do pojedynczej klatki Jordana.

Sformułujemy teraz twierdzenie, które gwarantuje jednoznaczność definicji wymiaru Goldiego. Jest to odpowiednik lematu Steinitza o wymianie, który dowodzi się definiując wymiar przestrzeni liniowej. W istocie, jeśli poniższe twierdzenie sformułuje się w języku przestrzeni liniowych, pamiętając, że jednolite przestrzenie liniowe to przestrzenie jednowymiarowe, a jedynym istotnym podmodułem przestrzeni liniowej V jest ona sama, to otrzyma się dokładnie lemat o wymianie dla przestrzeni liniowych. Podobieństwo jest szczególnie widoczne w dowodach obu twierdzeń.

Twierdzenie 1.2.17. *Niech $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ i $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ będą istotnymi podmodułami modułu M oraz $U_1, \ldots, U_m, V_1, \ldots, V_n$ będą jednolitymi modułami. Wtedy $m = n$.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, ze $n \geqslant m$. Niech $\widehat{U} = U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$. Pokażemy, że $\widehat{U}$ przecina któreś V_j w sposób trywialny. Dla każdego j moduł V_j jest jednolity, więc jeśli moduł $\widehat{U} \cap V_j$ byłby niezerowy, to byłby istotnym podmodułem V_j. Na mocy Lematu 1.2.8 moduł $(\widehat{U} \cap V_1) \oplus \ldots \oplus (\widehat{U} \cap V_n)$ byłby istotnym podmodułem $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n = V$. Wtedy także $\widehat{U} \cap V$ byłby istotnym podmodułem V, bo $\widehat{U} \cap V \supseteq (\widehat{U} \cap V_1) \oplus \ldots \oplus (\widehat{U} \cap V_n)$. Z przechodniości bycia podmodułem istotnym (Uwaga 1.2.7 (2)) to oznacza, że $\widehat{U}$ byłby istotny w M. To jednak jest niemożliwe.

Zmieniając indeksy możemy założyć, że $\widehat{U} \cap V_1 = 0$. Niech $U' = \widehat{U} \oplus V_1$. Wówczas $U' \cap U_1 \neq 0$, bo w przeciwnym przypadku suma $U_1 + \ldots + U_m + V_1$ byłaby prosta, a to jest sprzeczne z istotnością U. Ponieważ U_1 jest jednolity, to $U' \cap U_1$ jest istotnym podmodułem U_1. Zatem $(U' \cap U_1) \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$ jest istotnym podmodułem $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$. Ponieważ $(U' \cap U_1) \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m \subseteq U'$, dostajemy jak poprzednio, że U' jest istotnym podmodułem M. Przechodząc od U do U' zastąpiliśmy składnik U_1 przez V_1. Powtarzając ten proces (w razie konieczności zmieniając indeksy $V_1, \ldots, V_n$) przechodzimy od U' do modułu $U'' = V_1 \oplus V_2 \oplus U_3 \oplus \ldots \oplus U_m$, istotnego w M. Po m krokach otrzymamy $U^{(m)} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$, który również jest istotnym podmodułem M. Z drugiej strony, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ jest istotnym podmodułem M, więc musi być $m = n$.

□

Definicja 1.2.18. Mówimy, że moduł M ma *wymiar Goldiego* n, jeśli istnieje istotny podmoduł $V \subseteq M$, który jest sumą prostą n jednolitych podmodułów. Jeśli takie n nie istnieje, to mówimy, że wymiar Goldiego modułu M jest nieskończony. Wymiar Goldiego modułu M oznaczamy przez udim$M$.

Twierdzenie 1.2.17 gwarantuje, że wymiar Goldiego jest zdefiniowany jednoznacznie. Policzymy teraz wymiar Goldiego kilku rozważanych wcześniej modułów.

Przykład 1.2.19. Jeśli V jest przestrzenią liniową, to dim$V$ = udim$V$. Jeśli dim$V = n$, to istnieje n liniowo niezależnych wektorów $v_1, \ldots, v_n \in V$ oraz $V = \mathrm{lin}(v_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{lin}(v_n)$. W Przykładzie 1.2.3 pokazano, że jedynym istotnym podmodułem V jest moduł V. Ponadto na mocy Przykładu 1.2.11 podprzestrzeń $\mathrm{lin}(v_i)$ jest jednolitym podmodułem jako podprzestrzeń jednowymiarowa. Zatem istotnie dim$V$ = udim$V$.

Przykład 1.2.20. Moduł $\mathbb{Z}$ nad pierścieniem $\mathbb{Z}$ jest jednolity, zatem udim$\mathbb{Z} = 1$.

Przykład 1.2.21. Moduł $\mathbb{Z}_{p^n}$ nad pierścieniem $\mathbb{Z}$ jest jednolity, zatem udim$\mathbb{Z}_{p^n} = 1$.

Przykład 1.2.22. Wymiar Goldiego modułu z przykładu 1.1.6 jest równy 1, bo na mocy Przykładu 1.1.13 w tym module nie ma właściwych podmodułów.

Przykład 1.2.23. Rozważmy $\mathbb{Z}$-moduł $\mathbb{Z}_m$. Jeśli $m = p^n$ dla pewnej liczby pierwszej p, to moduł $\mathbb{Z}_{p^n}$ jest jednolity. Jeśli m ma dwa różne dzielniki pierwsze, to $\mathbb{Z}_m$ nie jest jednolity. Wtedy jednak $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$, gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi. Na mocy Przykładu 1.2.21 każdy z modułów $\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$ jest jednolity. Ponadto $\mathbb{Z}_m$ jest swoim istotnym podmodułem, zatem udim$\mathbb{Z}_m = k$, gdzie k jest liczbą różnych dzielników pierwszych liczby m.

Powyższy przykład można jeszcze bardziej uogólnić.

Przykład 1.2.24. Rozważmy skończony $\mathbb{Z}$-moduł G. Wówczas G jest skończoną grupą abelową i, jak wiemy, jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}_{{p_1}^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{{p_n}^{k_n}}$. Jak wiemy z Przykładu 1.2.21 każdy z modułów $\mathbb{Z}_{{p_j}^{k_j}}$ jest jednolity, zatem wymiar Goldiego tak określonej grupy G jest równy n.

Przykład 1.2.25. Rozważmy moduł V_φ. Niech V będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią liniową nad ciałem algebraicznie domkniętym. Przykład 1.2.4 mówi, że podmoduł W_φ modułu V_φ jest istotny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera podprzestrzeń rozpiętą na wszystkich wektorach własnych przekształcenia φ. Ponadto na mocy Przykładu 1.2.16 wiadomo, że podmoduł W_φ jest jednolity wtedy i tylko wtedy, gdy macierz przekształcenia φ jest podobna do klatki Jordana. Z twierdzenia Jordana wiemy, macierz przekształcenia φ jest podobna do macierzy M w postaci Jordana. Niech zatem $W_1, \ldots, W_n$ będą przestrzeniami odpowiadającymi kolejnym klatkom Jordana macierzy M. Wówczas $W_1 \oplus \ldots \oplus W_n = V$ i oczywiście V jest podmodułem istotnym V_φ. Zatem wymiar Goldiego modułu V_φ jest równych liczbie klatek Jordana macierzy przekształcenia φ.

W następnym podrozdziale zajmiemy się różnymi definicjami dualnego wymiaru Goldiego dla modułów. Wszystkie te definicje opierają się na jakiejś charakterystyce modułów o skończonym wymiarze Goldiego. W dalszej części tego podrozdziału spróbujemy opisać moduły o takiej własności.

Lemat 1.2.26. *Niech M będzie modułem o skończonym wymiarze Goldiego. Wtedy każda suma prosta niezerowych podmodułów $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k \subseteq M$ ma $k \leqslant n$ składników.*

Dowód. Lemat udowodnimy przez indukcję ze względu na n. Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Pokażemy, że jest prawdziwa dla $n > 0$.

Niech V będzie istotnym podmodułem M z definicji wymiaru Goldiego. Wtedy

$$N_i' = N_i \cap V \neq 0 \text{ oraz } V \supseteq B_1' \oplus \ldots \oplus N_k'.$$

Zatem możemy założyć, że $M = V$ i $M = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, gdzie wszystkie V_i są jednolite. Niech $\widehat{N} = N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$. Argumentując podobnie jak w pierwszej części dowodu Twierdzenia 1.2.17 możemy założyć, że po ewentualnym przenumerowaniu modułów V_i zachodzi $\widehat{N} \cap V_1 = 0$. Rzutując M na $V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$ wzdłuż V_1 dostajemy włożenie $\widehat{N}$ w $V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$. Sprowadziliśmy więc przypadek dla n do przypadku dla $n - 1$. Korzystając z założenia indukcyjnego, mamy $k - 1 \leqslant n - 1$, a zatem faktycznie $k \leqslant n$. $\square$

Lemat 1.2.27. *Niech M będzie modułem. Wówczas* $\mathrm{udim} M = \infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy M zawiera nieskończoną sumę prostą niezerowych podmodułów.*

Dowód. Implikacja z prawej do lewej jest oczywista na mocy Lematu 1.2.26. Aby udowodnić wynikanie w drugą stronę, przypuśćmy, że M nie zawiera nieskończonej sumy niezerowych podmodułów. Pokażemy, że wtedy każdy niezerowy podmoduł $N \subseteq M$ zawiera jednolity podmoduł. Jeśli tak nie jest, to wtedy N nie jest jednolity, a zatem zawiera pewną sumę prostą $A_1 \oplus B_1$, gdzie A_1, B_1 są niezerowymi podmodułami. Wtedy B_1 nie jest jednolity, a zatem zawiera pewną sumę prostą $A_2 \oplus B_2$, gdzie A_2, B_2 są niezerowymi podmodułami. Kontynuując ten proces, otrzymamy nieskończoną sumę prostą $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \subseteq M$, wbrew założeniu. Zatem rzeczywiście każdy podmoduł zawiera pewien podmoduł jednolity. Weźmy zatem jednolity podmoduł $V_1 \subseteq M$. Jeśli V_1 nie jest istotny w M, to znajdziemy podmoduł $V_2 \subseteq M$ taki, że $V_1 \oplus V_2 \subseteq M$. Oczywiście możemy założyć, że V_2 jest jednolity. Jeśli $V_1 \oplus V_2$ nie jest istotny w M, w podobny sposób znajdziemy jednolity podmoduł V_3. Z założenia nie możemy kontynuować tego procesu w nieskończoność. Skończymy zatem na pewnym podmodule istotnym $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$. Wtedy z definicji $\mathrm{udim} M = n$. $\square$

Wniosek 1.2.28. *Wymiar Goldiego modułu M jest równy kresowi górnemu zbioru*

$$K = \{k : M \textit{ zawiera sumę prostą } k \textit{ niezerowych podmodułów}\}.$$

Dowód. Niech $k_0 \leqslant \infty$ będzie kresem górnym zbioru K. Jeśli $k_0 = \infty$ to na mocy Lematu 1.2.26 wymiar Goldiego modułu M też musi być równy ∞, więc rzeczywiście w tym przypadku $\mathrm{udim} M = k_0$. Załóżmy zatem, że $k_0 < \infty$. Na mocy Lematu 1.2.27 wiemy, że wymiar Goldiego modułu M musi być skończony. Z Lematu 1.2.26 łatwo wnioskujemy, że $\mathrm{udim} M = k_0$. $\square$

Lemat 1.2.29. *Moduł M ma skończony wymiar Goldiego wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ podmodułów M istnieje indeks j taki, że dla wszystkich $k \geqslant j$ podmoduł N_j jest istotny w N_k.*

Dowód. Załóżmy, że M ma skończony wymiar Goldiego i przypuśćmy, że istnieje ciąg $0 \neq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \ldots$ taki, że dla każdego $j \geqslant 1$ moduł N_j nie jest istotny w pewnym module $N_{k(j)}$, gdzie $k(j) > j$. Bez straty ogólności możemy założyć, że dla każdego j mamy $k(j) = j + 1$. Wówczas istnieją podmoduły $0 \neq N_j' \subseteq N_{j+1}$ takie, że $N_j \cap N_j' = 0$. Wtedy suma $N_1 + N_1' + N_2' + \ldots$ jest prosta, a to na mocy Lematu 1.2.26 jest sprzeczne z założeniem, że M ma skończony wymiar Goldiego.

Udowodnimy teraz implikację przeciwną. Załóżmy, że dla każdego ciągu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ podmodułów M istnieje indeks j taki, że dla wszystkich $k \geqslant j$ podmoduł N_j jest istotny w N_k i przypuśćmy, że M ma nieskończony wymiar Goldiego. Wtedy na mocy Lematu 1.2.27 w M istnieje nieskończona suma prosta $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots$ Wówczas $N_1 \subsetneq N_1 \oplus N_2 \subsetneq N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \subsetneq \ldots$ i dla każdego k zachodzi $(N_1 \oplus \ldots \oplus N_k) \cap N_{k+1} = 0$, zatem żadne $N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$ nie jest istotne w N_{k+1}, wbrew założeniu. □

Z powyższych rozważań otrzymujemy następującą charakteryzację modułów o skończonym wymiarze Goldiego.

Wniosek 1.2.30. *Moduł M o* skończonym wymiarze Goldiego *możemy scharakteryzować przez jeden z następujących równoważnych warunków.*

1. *M nie zawiera nieskończonej sumy prostej niezerowych podmodułów.*
2. *M zawiera istotny podmoduł będący sumą prostą jednolitych podmodułów M.*
3. *Dla każdego wstępującego łańcucha podmodułów $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots$ w M istnieje indeks k taki, że N_k jest istotny w N_i dla każdego $i \geqslant k$.*

1.3. Definicja dualnego wymiaru Goldiego dla modułów

W literaturze można znaleźć kilka różnych prób dualizacji wymiaru Goldiego, ich przegląd zawiera praca Lompa [5]. Każda z tych prób opiera się na charakterystyce skończonego wymiaru Goldiego.

Łatwo jest zdualizować pojęcia modułu istotnego i modułu jednolitego.

Definicja 1.3.1. Moduł $N \subseteq M$ jest *małym* podmodułem modułu M, jeśli dla każdego właściwego podmodułu $P \subseteq M$ moduł $P + N$ jest właściwy.

Definicja 1.3.2. Niezerowy moduł M nazywamy *lekkim* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy właściwy podmoduł M jest mały w M.

Pojęcie bycia istotnym rozszerzeniem dualizujemy w następujący, nieco zaskakujący sposób. W rozdziale trzecim stanie się jasne, dlaczego przyjęto właśnie taką definicję.

Definicja 1.3.3. Niech M będzie modułem i niech $K \subseteq N \subseteq M$ będą podmodułami M, przy czym K jest także podmodułem N. Mówimy, że N *leży powyżej* K w M, jeśli N/K jest małym podmodułem M/K.

Zamiast mówić o sumie prostej będziemy posługiwać się pojęciem rodziny koniezależnej.

Definicja 1.3.4. Niepusta rodzina $\{N_\lambda\}_\Lambda$ właściwych podmodułów modułu M nazywa się *koniezależną*, jeśli dla dowolnego $\lambda \in \Lambda$ i dowolnego skończonego niepustego podzbioru $F \subseteq \Lambda \setminus \{\lambda\}$

$$N_\lambda + \bigcap_{i \in F} N_i = M.$$

Aby stwierdzić, że nieskończona rodzina jest koniezależna, wystarczy sprawdzić wszystkie jej odcinki początkowe.

Lemat 1.3.5. *Niech $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną właściwych podmodułów M. Równoważne są warunki:*

1. *$\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest rodziną koniezależną,*
2. *$\{N_1, \ldots, N_n\}$ jest rodziną koniezależną dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2) jest oczywista.

(2) $\Rightarrow$ (1). Niech $F \subseteq \mathbb{N}$ będzie skończonym podzbiorem i niech $i \in \mathbb{N} \setminus F$. Niech $n = \max(\{i\} \cup F)$. Wtedy $\{N_1, \ldots, N_n\}$ jest rodziną koniezależną, a zatem $N_i + \bigcap_{j\in F} N_j = M$. $\square$

Przyjrzymy się teraz różnym definicjom dualnego wymiaru Goldiego. Najwcześniejszą próbą dualizacji jest definicja Fleury'ego ([1]). Dualizuje on warunek 3 z Wniosku 1.2.30.

Definicja 1.3.6 (Fleury)**.** Moduł M ma *skończony wymiar rozpinający* (ang. *finite spanning dimension*), jeśli dla każdego ściśle malejącego łańcucha podmodułów $N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq N_3 \supsetneq \ldots$ w M istnieje liczba k taka, że N_i jest małym podmodułem M dla wszystkich $i \geqslant k$.

Późniejsze próby dualizacji wymiaru Goldiego pochodzą od Takeuchiego, Reitera i Varadarajana. Takeuchi dualizuje warunek 1 z Wniosku 1.2.30.

Definicja 1.3.7 (Takeuchi)**.** Moduł M nazywamy *koskończenie wymiarowym* (ang. *cofinite-dimensional*), jeśli M nie zawiera nieskończonej koniezależnej rodziny podmodułów.

Reiter, podobnie jak Fleury, dualizuje warunek 3 Wniosku 1.2.30.

Definicja 1.3.8 (Reiter)**.** Moduł M ma skończony *kowymiar*, jeśli nie istnieje ściśle malejący łańcuch

$$U_1 \supsetneq U_1 \cap U_2 \supsetneq U_1 \cap U_2 \cap U_3 \supsetneq \ldots$$

podmodułów $U_i \subsetneq M$ takich, że $\{U_1, \ldots, U_n\}$ jest koniezależną rodziną dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Definicję 1.3.8 można wyrazić w inny sposób, co pokazuje następujący lemat.

Lemat 1.3.9. *Niech M będzie modułem. M ma skończony kowymiar wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym zstępującym łańcuchu podmodułów $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$ istnieje indeks n taki, że N_n leży powyżej N_k dla $k \geqslant n$.*

Dowód. Przypuśćmy, że w M istnieje ciąg modułów

$$M \neq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq N_3 \supsetneq \ldots$$

taki, że dla każdego $j \geqslant 1$ istnieje indeks $k(j) \geqslant j$ taki, że N_j nie leży powyżej $N_{k(j)}$. Możemy założyć, że $k(j) = j + 1$. Skoro N_j nie leży powyżej N_{j+1}, to znaczy, że N_j/N_{j+1} nie jest mały w M/N_{j+1}. Istnieje podmoduł K w M/N_{j+1} taki, że $N_j/N_{j+1} + K = M/N_{j+1}$. Niech $\pi : M \to M/N_{j+1}$ będzie naturalnym rzutowaniem. Wtedy $N'_j = \pi^{-1}(K)$ jest podmodułem w M i oczywiście $N_j + N'_j = M$. Wówczas $N_j \subseteq N_1$, $N_j \subseteq N'_1$ oraz $N_j \subseteq N'_{j-1}$, a zatem $N_j \subseteq N_1 \cap N'_1 \cap \ldots \cap N'_{j-1}$ i stąd

$$(N_1 \cap N'_1 \cap \ldots \cap N'_{j-1}) + N'_j = M$$

dla wszystkich $j > 1$. Wtedy $\{N_1, N'_1, N'_2, \ldots\}$ jest rodziną koniezależną oraz

$$N_1 \supsetneq N_1 \cap N'_1 \supsetneq N_1 \cap N'_1 \cap N'_2 \supsetneq \ldots,$$

więc M nie ma skończonego kowymiaru.

Jeśli moduł M nie ma skończonego kowymiaru, to w M istnieje nieskończony zbiór koniezależny $\{N_1, N_2, \ldots\}$. Wtedy

$$N_1 \supsetneq N_1 \cap N_2 \supsetneq N_1 \cap N_2 \cap N3 \supsetneq \ldots$$

oraz dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, $(N_1 \cap \ldots \cap N_k) + N_{k+1} = M$. Stąd wynika, że dla dowolnego $l \geqslant n$ zachodzi $(N_1 \cap \ldots \cap N_k)/(N_1 \cap \ldots \cap N_l) + N_{k+1}/(N_1 \cap \ldots \cap N_l) = M/(N_1 \cap \ldots \cap N_l)$. Zatem $N_1 \cap \ldots \cap N_k$ nie leży powyżej $N_1 \cap \ldots \cap N_l$ dla żadnego $l \geqslant n$. $\square$

Widzimy zatem, że w definicji Reitera własność „N_k jest istotny w N_i” z punktu 3 Wniosku 1.2.30 jest dualizowana przez własność „N_k leży powyżej N_i”.

Można pokazać, że podejścia Reitera i Takeuchiego w istocie definiują to samo pojęcie.

Uwaga 1.3.10. Definicje Reitera i Takeuchiego są równoważne.

Dowód. Przypuśćmy, że moduł M nie spełnia Definicji 1.3.7, to znaczy istnieje w nim nieskończona koniezależna rodzina właściwych podmodułów $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Wtedy $U_1 \cap \ldots \cap U_k \neq M$ oraz $U_1 \cap \ldots \cap U_k + U_{k+1} = M$, zatem $U_1 \cap \ldots \cap U_k \supsetneq U_1 \cap \ldots U_{k+1}$. Wtedy łańcuch

$$U_1 \supsetneq U_1 \cap U_2 \supsetneq \ldots$$

jest ściśle zstępujący, a zatem M nie ma skończonego kowymiaru.

Odwrotnie, przypuśćmy, że w M istnieje nieskończony ściśle zstępujący łańcuch przecięć $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ taki, że każdy zbiór $\{U_1, \ldots, U_n\}$ jest koniezależny. Wtedy na mocy Uwagi 1.3.5 w M istnieje nieskończona koniezależna rodzina właściwych podmodułów. Zatem M nie ma koskończonego wymiaru. $\square$

Kolejna definicja dualnego wymiaru Goldiego pochodzi od Varadarajana. Ma ona naturę bardziej kategoryjną.

Definicja 1.3.11 (Varadarajan)**.** Moduł M ma *korangę* (ang. *corank*) k, jeśli istnieje epimorfizm z M na produkt k niezerowych modułów ilorazowych M, ale nie istnieje epimorfizm z M na produkt $k + 1$ niezerowych faktorów.

Poniższy lemat pozwala dostrzec związek definicji Varadarajana z innymi definicjami.

Lemat 1.3.12. *Niech M będzie modułem, $(N_\lambda)_\Lambda$ będzie rodziną niezerowych modułów, $f_\lambda : M \to N_\lambda$ będzie rodziną epimorfizmów. Niech $f : M \to \Pi_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ będzie homomorfizmem wyznaczonym przez rodzinę f_λ. Niech K_λ oznacza jądro homomorfizmu f_λ. Jeśli f jest epimorfizmem, to $(K_\lambda)_\Lambda$ jest rodziną koniezależną.*

Dowód. Niech $\lambda \in \Lambda$. Udowodnimy, że $M = K_\lambda + \bigcap_{\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} K_\mu$.

Niech $m \in M$. Jeśli $m \notin K_\lambda$, to $f_\lambda(m) \neq 0$. Niech n będzie elementem $\Pi_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ postaci $n = (\delta_{\lambda\mu} f_\lambda(m))_{\lambda \in \Lambda}$. Skoro f jest epimorfizmem, to istnieje $m_\lambda \in M$ taki, że $f(m_\lambda) = n$. To znaczy, że dla każdego $\mu \in \Lambda$ zachodzi $f_\mu(m_\lambda) = \delta_{\lambda\mu} f_\lambda(m)$. Zatem $m_\lambda \in \bigcap_{\lambda \neq \mu} K_\mu$. Ponadto $f_\lambda(m_\lambda) = f_\lambda(m)$. Zatem $m - m_\lambda \in K_\lambda$. Wtedy

$$m = (m - m_\lambda) + m_\lambda \in K_\lambda + \bigcap_{\lambda \neq \mu} K_\mu,$$

co kończy dowód. $\square$

Jeśli zatem $\text{corank}(M) = k$, to na mocy Lematu 1.3.12 w M nie istnieje koniezależna rodzina mocy większej niż k. Zatem moduł o skończonej korandze jest również konskończenie wymiarowy. W dalszej części pokażemy także, że implikacja w przeciwną stronę jest również prawdziwa.

Trzy przytoczone spojrzenia na dualny wymiar Goldiego okazują się być równoważne, choć początkowo nie jest to jasne. Związki między nimi są jednak nieintuicyjne, a dowody nie są naturalne. W następnych rozdziałach przedstawimy wymiar Goldiego i dualny wymiar Goldiego dla krat modularnych. Zobaczymy, że spojrzenie na dualny wymiar Goldiego dla modułów z perspektywy krat pozwala dobrze zrozumieć naturę tego pojęcia oraz w naturalny i elegancki sposób wyrazić równoważność różnych definicji dualnego wymiaru Goldiego i związki między nimi.

Rozdział 2

Wymiar Goldiego dla krat

2.1. Kraty modularne

Definicja 2.1.1. *Kratą* nazywamy strukturę $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$, gdzie L jest niepustym zbiorem, a $\vee$, $\wedge$ są dwuargumentowymi działaniami, w której spełnione są następujące równania:

1. $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$,
2. $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$,
3. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
4. $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

Element $a \vee b$ będziemy *sumą* elementów a i b, element $a \wedge b$ będziemy nazywać *iloczynem* elementów a i b.

Ponieważ warunki w definicji kraty są symetryczne, to zamieniając rolami działania $\vee$ i $\wedge$, również otrzymamy kratę. Ta obserwacja prowadzi do następującej definicji.

Definicja 2.1.2. Niech $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$ będzie kratą. Wówczas kratę $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ nazywamy *kratą dualną* kraty $\mathcal{L}$ i oznaczamy $\mathcal{L}^0$.

Na kraty można patrzeć również w inny sposób, jako na pewne szczególne zbiory częściowo uporządkowane.

Definicja 2.1.3. Zbiór częściowo uporządkowany $\mathcal{L} = \langle L, \leqslant \rangle$ nazywamy *kratą* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych elementów x, $y \in L$ istnieją kres górny i kres dolny zbioru $\{x, y\}$.

Wiadomo, że dwie definicje krat są równoważne. Mając daną kratę $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ możemy odtworzyć porządek $\leqslant$. Mianowicie określamy, że relacja $x \leqslant y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x \wedge y = x$. Odwrotnie, mając daną kratę $\langle L, \leqslant \rangle$ można odtworzyć operacje $\vee$ oraz $\wedge$: $x \vee y = \sup\{x, y\}$ i $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Będziemy używać obu definicji krat, zależnie od tego, która jest bardziej wygodna.

Jedną z najprostszych, ale często używanych krat prezentuje następujący przykład.

Przykład 2.1.4. Zbiór $\mathbb{2} = \{0, 1\}$ z działaniami

$$0 \wedge 0 = 0 \qquad 0 \vee 0 = 0$$
$$1 \wedge 1 = 1 \qquad 1 \vee 1 = 1$$
$$0 \wedge 1 = 0 \qquad 0 \vee 1 = 1$$

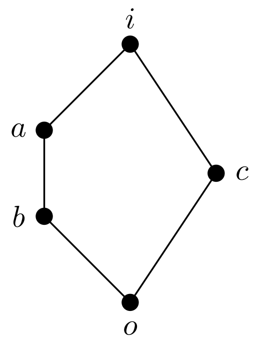
jest kratą.

Powyższy przykład jest szczególnym przypadkiem następującej rodziny krat.

Przykład 2.1.5. Niech X będzie zbiorem. Łatwo sprawdzić, że wówczas $\langle P(X), \cup, \cap \rangle$, gdzie $P(X)$ jest zbiorem potęgowym zbioru X, zaś $\cup$, $\cap$ to odpowiednio teoriomnogościowa suma i iloczyn, jest kratą.

Definiowanie krat przez jawne wypisywanie, w jaki sposób działają operacje, jest niewygodne. Dlatego często używa się do tego celu graficznej reprezentacji krat — diagramów. Diagram przedstawia kratę jako porządek częściowy. Elementy kraty reprezentowane są jako punkty. Relacja porządku między elementami jest reprezentowana za pomocą linii łączących punkty, elementy położone niżej są mniejsze. Aby diagram był czytelny, rysuje się minimalną liczbę linii potrzebną do odtworzenia porządku. Nie rysuje się zatem linii, które wynikają z przechodniości porządku częściowego. Użyjemy diagramów do zaprezentowania dwóch ważnych przykładów krat.

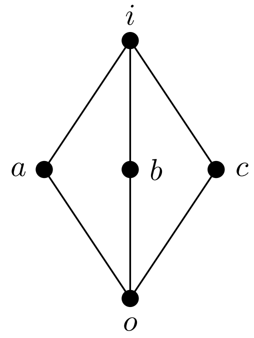
Przykład 2.1.6. Kratę pokazaną na Rysunku 2.1 będziemy nazywać *pentagonem* i oznaczać przez N_5.



Rysunek 2.1: Krata N_5

Przykład 2.1.7. Kratę pokazaną na Rysunku 2.2 będziemy nazywać *diamentem* i oznaczać przez M_3.

Łatwo jest udowodnić, że w kracie skończonej musi istnieć element najmniejszy i element największy. Jeśli takie elementy istnieją, to element najmniejszy w kracie nazywamy *zerem*, zaś element największy nazywamy *jedynką*.



Rysunek 2.2: Krata M_3

Definicja 2.1.8. Zbiór $K \subseteq L$ nazywamy *podkratą* wtedy i tylko wtedy, gdy K jest zamknięty ze względu na działania $\vee$ i $\wedge$.

Niech $a, b \in L$. Będziemy używać notacji $[a, b]$ dla oznaczenia zbioru $\{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Zbiór $[a, b]$ będziemy nazywać przedziałem. Oczywiście przedział $[a, b]$ jest podkratą $\mathcal{L}$ oraz $\mathcal{L} = [0, 1]$.

Definicja 2.1.9. Niech $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ będą kratami. Funkcję $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ będziemy nazywać *izomorfizmem* krat wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest bijekcją oraz dla dowolnych elementów x, $y \in L_1$

- $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ i
- $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$.

Równoważnie, możemy zdefiniować izomorfizm krat jako izomorfizm porządków częściowych.

Definicja 2.1.10. Niech $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ będą kratami. Funkcję $\varphi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ będziemy nazywać *izomorfizmem* krat wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest bijekcją oraz φ zachowuje porządek, to znaczy

$$\text{jeśli } x \leqslant y, \text{ to } \varphi(x) \leqslant \varphi(y).$$

W tej pracy będziemy zajmować się szczególną klasą krat, mianowicie kratami modularnymi.

Definicja 2.1.11. Kratę spełniającą dla dowolnych x, y, z warunek

$$\text{jeśli } x \geqslant z, \text{ to } (x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z)$$

nazywamy *kratą modularną*.

Uwaga 2.1.12. Warunek sformułowany w definicji kraty modularnej i warunek dualny do niego są identyczne. Zatem jeśli krata $\mathcal{L}$ jest modularna, to również jej krata dualna $\mathcal{L}^0$ jest kratą modularną.

Kraty modularne można również zdefiniować za pomocą tożsamości. Poniższy lemat podaje równoważne charakteryzacje krat modularnych.

Lemat 2.1.13. *Niech $\mathcal{L}$ będzie kratą. Warunki*

(1) dla dowolnych x, y, $z \in L$, jeśli $x \geqslant z$, to $(x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z)$,

(2) dla dowolnych $x, y, z \in L$ zachodzi $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$,

(3) dla dowolnych $x, y, z \in L$ zachodzi $x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z)$

są równoważne.

Dowód. Najpierw udowodnimy równoważność (1) $\Leftrightarrow$ (2). Załóżmy, że zachodzi implikacja (1). Dla dowolnych elementów x, z zachodzi $x \geqslant x \wedge z$, więc możemy zastosować warunek (1) i otrzymamy

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z)).$$

Dla dowodu wynikania w drugą stronę załóżmy, że zachodzi tożsamość (2). Niech $x \geqslant z$. Wówczas $x \wedge z = z$. Stosując tę równość w tożsamości (2) otrzymujemy

$$(x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z).$$

Teraz udowodnimy równoważność (1) $\Leftrightarrow$ (3). Załóżmy, że zachodzi implikacja (1). Skoro $x \vee z \geqslant z$ to

$$(y \wedge (x \vee z)) \vee z = (y \vee z) \wedge (x \vee z).$$

Zatem zachodzi również

$$x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z) = x \wedge ((y \vee z) \wedge (x \vee z)) = (x \wedge (x \vee z)) \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z).$$

Dla dowodu wynikania (3) $\Rightarrow$ (1) załóżmy, że zachodzi tożsamość (3). Niech $x \geqslant z$. Wówczas na mocy (3)

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z).$$

Ponieważ $x \geqslant z$, to $x \vee z = x$. Zatem

$$x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z) = x \wedge ((y \wedge x) \vee z).$$

Skoro $x \geqslant x \wedge y$ i $x \geqslant z$, to $x \geqslant (y \wedge x) \vee z$, a zatem

$$x \wedge ((y \wedge x) \vee z) = (y \wedge x) \vee z.$$

Istotnie zatem

$$x \wedge (y \vee z) = ((y \wedge x) \vee z.$$

□

Przykład 2.1.14. Kraty z Przykładów 2.1.4, 2.1.5 i 2.1.7 są modularne.

Jednakże nie wszystkie kraty są modularne, jak pokazuje poniższy przykład.

Przykład 2.1.15. Krata N_5 (Przykład 2.1.6) nie jest kratą modularną. W tej kracie zachodzi $a \geqslant b$. Jednakże wtedy

$$\begin{aligned}(a \wedge c) \vee b &= i \vee b = i,\\ a \wedge (c \vee b) &= a \wedge 0 = 0,\end{aligned}$$

czyli $(a \wedge c) \vee b \neq a \wedge (c \vee b)$.

Dla krat modularnych zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.1.16. *Dla dowolnych $a, b \in L$ odwzorowanie $\varphi_b : x \mapsto x \wedge b$ jest izomorfizmem przedziałów $[a, a \vee b]$ i $[a \wedge b, b]$. Izomorfizm odwrotny dany jest przez $\psi_a : x \mapsto x \vee a$.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że jeśli $x \in [a, a \vee b]$, to $\varphi_b(x) = x \wedge b \in [a \wedge b, b]$, zatem funkcja φ_b jest dobrze określona. Aby udowodnić, że φ_b jest bijekcją wystarczy wskazać funkcję odwrotną. Pokażemy, że ψ_a jest funkcją odwrotną do φ_b. Z definicji $\psi_a(\varphi_b(x)) = (x \wedge b) \vee a$. Ponieważ $a \leqslant x$, to z modularności $(x \wedge b) \vee a = x \wedge (a \vee b)$. Ponadto $x \leqslant a \vee b$, zatem $x \wedge (a \vee b) = x$. Co więcej, jest oczywiste, że φ_b zachowuje porządek. Zatem rzeczywiście φ_b jest izomorfizmem przedziałów $[a, a \vee b]$ i $[a \wedge b, b]$.

□

Definicja 2.1.17. Podzbiór I zbioru $L \setminus \{0\}$ nazywamy *sumowo niezależnym* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego skończonego podzbioru $F \subseteq I$ i $x \in I \setminus F$ zachodzi $\bigvee F \wedge x = 0$, gdzie $\bigvee F$ oznacza sumę wszystkich elementów F.

Przykład 2.1.18. Rozważmy diament z Przykładu 2.1.7. Łatwo sprawdzić, że zbiór $\{a, b\}$ jest zbiorem sumowo niezależnym. Co więcej, zbiór $\{a, b\}$ jest maksymalnym zbiorem sumowo niezależnym. Inne zbioru sumowo niezależne w tej kracie to $\{a, c\}$ i $\{b, c\}$.

Lemat 2.1.19. *Jeśli I jest sumowo niezależnym podzbiorem $L \setminus \{0\}$, x jest niezerowym elementem L takim, że dla każdego skończonego $X \subseteq I$ zachodzi $x \wedge \bigvee X = 0$, to zbiór $I \cup \{x\}$ jest sumowo niezależny.*

Dowód. Niech F będzie skończonym podzbiorem zbioru $I \cup \{x\}$. Niech $y \in (I \cup \{x\}) - F$. Możliwe są trzy przypadki:

- $F \in I$, $y \neq x$. Wtedy $\bigvee F \wedge y = 0$ z założenia.
- $F \in I$, $y = x$. Wtedy $\bigvee F \wedge y = 0$ z założenia, że I jest sumowo niezależnym podzbiorem $L \setminus \{0\}$.
- $x \in F$, $y \neq x$. Wtedy używając tożsamości 2.1.13 z Lematu 2.1.13 otrzymujemy

  $$\begin{aligned}\bigvee F \wedge y = (\bigvee(F - \{x\}) \vee x) \wedge y = y \wedge ((x \wedge (y \vee (\bigvee(F - \{x\})))) \vee (\bigvee(F - \{x\}))) = \\ \overset{(*)}{=} y \wedge (\bigvee(F - \{x\})) = 0\end{aligned}$$

  Równość $(*)$ zachodzi, ponieważ z założenia wiemy, że $x \wedge (y \vee (\bigvee(F - \{x\}))) = 0$.

□

Uwaga 2.1.20. Z lematu Kuratowskiego-Zorna otrzymujemy, że dla dowolnego sumowo niezależnego podzbioru $I \subseteq L \setminus \{0\}$ istnieje maksymalny sumowo niezależny zbiór I' zawierający I. Na mocy Lematu 2.1.19 jeśli $0 \neq x \in L \setminus I'$, to $\bigvee X \wedge x \neq 0$ dla pewnego skończonego podzbioru $X \subseteq I'$.

2.2. Definicja wymiaru Goldiego w kratach

W tej części pracy zajmiemy się zdefiniowaniem głównego pojęcia tej pracy, to jest wymiaru Goldiego dla krat. Wszystkie kraty, o których będzie mowa, są kratami modularnymi z zerem i jedynką. Wprowadzimy różne pomocnicze pojęcia, a następnie udowodnimy twierdzenie, które jest podstawą definicji wymiaru Goldiego dla krat. Przedstawimy samą definicję, kilka przykładów oraz podstawowe własności tego wymiaru. W dalszej części pracy pokażemy związek między wymiarem Goldiego dla krat i wprowadzonym wcześniej wymiarem Goldiego dla modułów.

Definicja 2.2.1. Niezerowy element $a \in L$ nazywamy *istotnym w* $\mathcal{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niezerowego elementu $x \in L$ zachodzi $a \wedge x \neq 0$.

Przykład 2.2.2. Jeśli krata $\mathcal{L}$ ma jedynkę, to jedynka jest elementem istotnym w kracie $\mathcal{L}$.

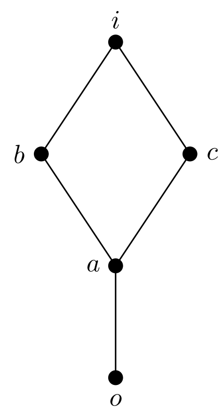
Przykład 2.2.3. W kracie M_3 nie ma elementów istotnych różnych od jedynki.

Przykład 2.2.4. W kracie $\langle P(X), \cup, \cap \rangle$ z Przykładu 2.1.5 jedynym elementem istotnym jest zbiór X. Jeśli X jest zbiorem jednoelementowym, to X jest jedynym niezerowym elementem kraty $\mathcal{P}(X)$. Jeśli X jest mocy większej niż 1, to istnieje jego podzbiór właściwy $Y \subsetneq X$. Wtedy istnieje $X \setminus Y \neq \emptyset$ oraz $Y \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ i Y nie jest elementem istotnym w $\mathcal{P}(X)$.

Uwaga 2.2.5. Jeśli a jest elementem istotnym w kracie $\mathcal{L}$ i $b \geqslant a$, to b również jest elementem istotnym w $\mathcal{L}$.

Dowód. Niech x będzie dowolnym niezerowym elementem kraty $\mathcal{L}$. Wtedy $a \wedge x \neq 0$, ponieważ a jest istotny w $\mathcal{L}$. Ponadto $b \geqslant a$, zatem $b \wedge x \geqslant a \wedge x$. Rzeczywiście zatem $b \wedge x \neq 0$. □

Przykład 2.2.6. Rozważmy kratę $\mathcal{B}$ przedstawioną na Rysunku 2.3.



Rysunek 2.3: Krata, w której wszystkie elementy są istotne

Element a jest istotny w $\mathcal{B}$, a zatem na mocy Uwagi 2.2.5, wszystkie niezerowe elementy w $\mathcal{B}$ są istotne.

Definicja 2.2.7. Kratę $\mathcal{L}$ nazywamy *jednolitą* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy element jest istotny w $\mathcal{L}$.

Przykład 2.2.8. Krata $\mathbb{2}$ z Przykładu 2.1.4 jest kratą jednolitą. Jak wynika z rozważań w Przykładzie 2.2.4 poza kratą jednoelementową, jest to jedyna krata jednolita w rodzinie krat $\mathcal{P}(X)$ z Przykładu 2.1.5.

Przykład 2.2.9. Krata M_3 z Przykładu 2.1.7 nie jest jednolita.

Przykład 2.2.10. Krata $\mathcal{B}$ z Przykładu 2.2.6 jest jednolita.

Udowodnimy teraz kilka własności elementów istotnych, które będą przydatne przy definiowaniu wymiaru Goldiego. Poniższy lemat mówi, że własność bycia elementem istotnym w pewnym sensie jest przechodnia.

Lemat 2.2.11. *Niech $a < b < c < d$ będą elementami L. Jeśli element b jest istotny w przedziale $[a, c]$ i c jest istotny w przedziale $[a, d]$, to b jest istotny w przedziale $[a, d]$.*

Dowód. Niech x będzie elementem przedziału $[a, d]$ takim, że $b \wedge x = a$. Ponieważ $a < c$, to $a = a \wedge c = (b \wedge x) \wedge c = b \wedge (x \wedge c)$. Skoro $x \wedge c \in [a, c]$, zaś b jest istotny w $[a, c]$, to $x \wedge c = a$. Z istotności elementu c w kracie $[a, d]$ otrzymujemy, że $x = a$. To zaś oznacza, że również element b jest istotny w kracie $[a, d]$. □

Zauważmy również, że własność istotności dobrze się zachowuje przy operacjach algebraicznych.

Lemat 2.2.12. *Niech a, b, c, $d \in L$ i niech $b \wedge d = 0$. Jeśli a i c są istotne odpowiednio w $[0, b]$ i $[0, d]$, to $a \vee c$ jest istotny w $[0, b \vee d]$.*

Dowód. Najpierw udowodnimy, że $a \vee d$ jest istotny w $[0, b \vee d]$. Niech x będzie elementem $[0, b \vee d]$ takim, że $x \wedge (a \vee d) = 0$. Stąd i z Lematu 2.1.19 dostajemy, że $a \wedge (x \vee d) = 0$. Zatem zachodzi także $a \wedge b \wedge (x \vee d) = 0$. Ponadto element a jest istotny w $[0, b]$ oraz $b \wedge (x \vee d) \in [0, b]$, skąd wynika, że $b \wedge (x \vee d) = 0$. Używając ponownie Lematu 2.1.19, dostajemy, że $x \wedge (b \vee d) = 0$. Ale $x \leqslant b \vee d$, więc wnioskujemy stąd, że $x = 0$. Zatem $a \vee d$ jest istotny w $[0, b \vee d]$.

Podobnie możemy udowodnić, że $a \vee c$ jest istotny w $[0, a \vee d]$ i z Lematu 2.2.11 dostajemy tezę. □

Z Lematu 2.2.12 łatwo wyciągnąć następujący wniosek.

Wniosek 2.2.13. *Jeśli a_1, …, a_n, b_1, …, b_n są elementami L takimi, że*

1. *zbiór $\{b_1, \ldots, b_n\}$ jest sumowo niezależny,*

2. *elementy a_i są istotne w $[0, b_i]$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$,*

to element $a_1 \vee \ldots \vee a_n$ jest istotny w kracie $[0, b_1 \vee \ldots \vee b_n]$.

Dowód. Wniosek udowodnimy przez indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy zatem, że teza wniosku zachodzi dla ciągów długości n. Pokażemy, że zachodzi także dla ciągów długości $n + 1$. Niech a_1, …, a_{n+1}, b_1, …, b_{n+1} będą elementami jak w treści wniosku. Wówczas z założenia indukcyjnego element $a_1 \vee \ldots \vee a_n$ jest istotny w kracie $[0, b_1 \vee \ldots \vee b_n]$. Ponadto zbiór $\{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$ jest sumowo niezależny, zatem $(b_1 \vee \ldots \vee b_n) \wedge b_{n+1} = 0$. Korzystając z Lematu 2.2.12 otrzymujemy, że element $a_1 \vee \ldots \vee a_n \vee a_{n+1}$ jest istotny w przedziale $[0, b_1 \vee \ldots \vee b_{n+1}]$, co należało udowodnić. □

Teraz możemy udowodnić następujące twierdzenie, które jest podstawą definicji wymiaru Goldiego dla krat modularnych.

Twierdzenie 2.2.14. *Niech L będzie kratą modularną z zerem i jedynką. Następujące warunki są równoważne:*

1. *L nie zawiera nieskończonego zbioru sumowo niezależnego,*
2. *L zawiera skończony zbiór sumowo niezależny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ taki, że element $a_1 \vee \ldots \vee a_n$ jest istotny w $\mathcal{L}$ i kraty $[0, a_i]$ są jednolite dla $1 \leqslant i \leqslant n$,*
3. $\sup\{k \mid L$ *zawiera sumowo niezależny podzbiór mocy* $k\} = n < \infty$,
4. *dla każdego ciągu $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ elementów z L istnieje indeks j taki, że dla wszystkich $k \geqslant j$ element a_j jest istotny w kracie $[0, a_k]$.*

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (2) Najpierw udowodnimy, że dla dowolnego $0 \neq b \in L$ istnieje niezerowy element $c \leqslant b$ taki, że krata $[0, c]$ jest jednolita. Jeśli tak nie jest, to przez indukcję skonstruujemy ciąg c_1, c_2, $\ldots$ elementów $L \setminus \{0\}$ takich, że zbiór $\{c_1, c_2, \ldots\}$ jest sumowo niezależny i dla dowolnego k element $c_1 \vee \ldots \vee c_k$ nie jest istotny w $[0, b]$. Dla $k = 1$ konstrukcja jest oczywista. Weźmy dowolny element $e \leqslant b$. Z założenia krata $[0, e]$ nie jest jednolita, zatem istnieją elementy c_1, $c_1' \leqslant e$ takie, że $c_1 \wedge c_1' = 0$. Ponieważ $c_1' \leqslant b$, to oczywiście c_1 nie jest istotny w $[0, b]$. Ponadto zbiór $\{c_1\}$ jest sumowo niezależny, zatem element c_1 spełnia postulowane warunki. Załóżmy, że skonstruowaliśmy ciąg c_1, $\ldots$, c_{k-1}. Ponieważ $c_1 \vee \ldots \vee c_{k-1}$ nie jest istotny w $[0, b]$, istnieje element $0 \neq d \leqslant b$ taki, że $(c_1 \vee \ldots \vee c_{k-1}) \wedge d = 0$. Z założenia krata $[0, d]$ nie jest jednolita. Zatem istnieją $0 \neq d_1, d_2 \leqslant d$ takie, że $d_1 \wedge d_2 = 0$. Niech $c_k = d_1$. Z Lematu 2.1.19 zbiór $\{c_1, \ldots, c_k\}$ jest sumowo niezależny i element $c_1 \vee \ldots \vee c_k$ nie jest istotny w $[0, b]$, ponieważ korzystając z warunku (3) w Lemacie 2.1.13

$$(c_1 \vee \ldots \vee c_k) \wedge d_2 = (((c_1 \vee \ldots \vee c_{k-1}) \wedge (d_2 \vee c_k)) \vee c_k) \wedge d_2 = \\ = (((c_1 \vee \ldots \vee c_{k-1}) \wedge d) \vee c_k) \wedge d_2 = c_k \wedge d_2 = d_1 \wedge d_2 = 0$$

i $d_2 \neq 0$. Skonstruowaliśmy zatem nieskończony zbiór sumowo niezależny elementów L, co jest sprzeczne z (1).

Niech X będzie maksymalnym sumowo niezależnym podzbiorem zbioru elementów $x \in L$ takich, że krata $[0, x]$ jest jednolita. Na mocy (1) zbiór X jest skończony. Niech $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Twierdzimy, że $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ jest istotny w $\mathcal{L}$. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $0 \neq a \in L$ takie, że $(x_1 \vee \ldots \vee x_n) \wedge a = 0$. Z poprzednich rozważań wynika, że istnieje element $0 \neq c \leqslant a$ taki, że krata $[0, c]$ jest jednolita. Wtedy na mocy Lematu 2.1.19 zbiór $\{x_1, \ldots, x_n, c\}$ jest sumowo niezależny, wbrew maksymalności X.

(2) $\Rightarrow$ (3) Załóżmy, że L zawiera sumowo niezależny zbiór $\{b_1, \ldots, b_k\}$ i $k > n$. Pokażemy przez indukcję, że

$$\text{dla każdego } 0 \leqslant j \leqslant n \text{ zbiór } \{a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_k\} \text{ jest sumowo niezależny,} \tag{2.1}$$

Dla $j = 0$ teza jest oczywista. Niech $j \geqslant 0$ i niech $c = a_1 \vee \ldots \vee a_j \vee b_{j+2} \vee \ldots \vee b_k$. Rozważmy element $(a_1 \wedge c) \vee \ldots \vee (a_n \wedge c)$. Skoro kraty $[0, a_1]$, $\ldots$, $[0, a_n]$ są jednolite, to z Wniosku 2.2.13 wynika, że element $(a_1 \wedge c) \vee \ldots \vee (a_n \wedge c)$ jest istotny w $[0, a_1 \vee \ldots \vee a_n]$ jeśli tylko $a_s \wedge c \neq 0$ dla $s = 1, \ldots, n$. Ale z (2) element $a_1 \vee \ldots \vee a_n$ jest istotny w $\mathcal{L}$, więc wówczas

$(a_1 \wedge c) \vee \ldots \vee (a_n \wedge c)$ jest istotny w $\mathcal{L}$. Stąd natychmiast wynika, że element c jest istotny w $\mathcal{L}$. To zaś jest sprzeczne z faktem, że $c \wedge b_{j+1} = 0$. Zatem dla pewnego $1 \leqslant s \leqslant n$ zachodzi $a_s \wedge c = 0$. Biorąc $j + 1 = s$ otrzymujemy, że zbiór $\{a_1, \ldots, a_{j+1}, b_{j+2}, \ldots, b_k\}$ jest sumowo niezależny. Zatem zachodzi warunek (2.1).

W szczególności (2.1) implikuje, że zbiór $\{a_1, \ldots, a_n, b_{n+2}, \ldots, b_k\}$ jest sumowo niezależny. To zaś jest niemożliwe, bo $a_1 \vee \ldots \vee a_n$ jest istotny w $\mathcal{L}$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (4) Jeśli (4) nie zachodzi, to istnieje łańcuch $0 \neq a_1 < a_2 < \ldots$ elementów L taki, że dla każdego $j \geqslant 1$ element a_j nie jest istotny w pewnej kracie $[0, a_{k(j)}]$, gdzie $k(j) > j$. Niech j_m będzie ciągiem indeksów zdefiniowanym następująco: $j_1 = 1, j_m = k(j_{m-1})$. Wówczas istnieją elementy $0 \neq a'_{j_m} \leqslant a_{j_m}$ takie, że $a_{j_m} \wedge a'_{j_m} = 0$. Z Lematu 2.1.19 zbiór $\{a_j, a'_{j_1}, \ldots, a'_{j_m}, \ldots\}$ jest sumowo niezależny, co jest sprzeczne z (3).

(4) $\Rightarrow$ (1) Dowodzimy nie wprost. Jeśli (1) nie jest spełniona, to L zawiera sumowo niezależny zbiór $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Wtedy $a_1 < a_1 \vee a_2 < a_1 \vee a_2 \vee a_3 < \ldots$ i dla każdego k zachodzi $(a_1 \vee \ldots \vee a_k) \wedge a_{k+1} = 0$, co jest sprzeczne z (4). $\square$

Wprowadzimy zatem następującą definicję.

Definicja 2.2.15. Mówimy, że krata modularna $\mathcal{L}$ ma *wymiar Goldiego* n wtedy i tylko wtedy, gdy L zawiera skończony sumowo niezależny zbiór $\{a_1, \ldots, a_n\}$ taki, że element $a_1 \vee \ldots \vee a_n$ jest istotny w L i kraty $[0, a_i]$ są jednolite dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Jeśli taki zbiór nie istnieje, to mówimy, że wymiar Goldiego kraty $\mathcal{L}$ jest nieskończony. Wymiar Goldiego kraty $\mathcal{L}$ oznaczamy przez $\mathrm{udim}\mathcal{L}$.

Twierdzenie 2.2.14 gwarantuje, że przyjęta przez nas definicja wymiaru Goldiego jest poprawna. Jednocześnie daje ono charakteryzację krat o skończonym wymiarze Goldiego.

Przykład 2.2.16. Wprost z definicji kraty jednolitej i wymiaru Goldiego dla krat wynika, że wymiar Goldiego kraty jednolitej jest równy 1.

Przykład 2.2.17. W kracie M_3 mamy zbiór sumowo niezależny $\{a, b\}$. Ponadto $a \vee b = i$, zaś i jest elementem istotnym w M_3. Zatem wymiar Goldiego kraty M_3 jest równy 2.

Przykład 2.2.18. Rozważmy kratę $\mathcal{P}(X)$. Jak już wiemy, jedynym elementem istotnym tej kraty jest element X. Niech Y będzie podzbiorem X. Podkrata $[\emptyset, Y]$ jest izomorficzna z kratą $\mathcal{P}(Y)$. Zatem jest jednolita wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest zbiorem jednoelementowym. Sumowa niezależność rodziny podzbiorów $\{Y_i\}_{i \in I}$ oznacza, że zbiory Y_i są parami rozłączne. Szukamy zatem skończonej rodziny zbiorów jednoelementowych parami rozłącznych, która w sumie daje cały zbiór X. Jeśli zbiór X jest skończony, to taką rodziną jest oczywiście $\{\{x\}\}_{x \in X}$. Wtedy $\mathrm{udim}\mathcal{P}(X) = |X|$. Jeśli zbiór X jest nieskończony, to taka skończona rodzina nie istnieje i wtedy $\mathrm{udim}\mathcal{P}(X) = \infty$.

Z Twierdzenia 2.2.14 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.2.19. *Załóżmy, że* $\mathrm{udim}\mathcal{L} = n < \infty$. *Wówczas*

1. *Jeśli $a \in L$, to* $\mathrm{udim}[0, a] \leqslant n$. *Nierówność jest ostra wtedy i tylko wtedy, gdy element a nie jest istotny w $\mathcal{L}$.*

2. *Jeśli zbiór $\{a_1, \ldots, a_k\}$ elementów L jest sumowo niezależny, to* $\mathrm{udim}[0, a_1 \vee \ldots \vee a_k] = \Sigma_{j=1}^{k} \mathrm{udim}[0, a_j] \leqslant n$.

Dowód. 1. Niech $A \subseteq [0, a]$ będzie zbiorem sumowo niezależnym maksymalnej mocy. Wtedy również $A \subseteq L$. Zatem $|A| \leqslant n$, a stąd $\mathrm{udim}[0, a] \leqslant n$, co należało udowodnić.

Pokażemy teraz, że $\mathrm{udim}[0, a] < n$ wtedy i tylko wtedy, gdy element a nie jest istotny w $\mathcal{L}$.

Załóżmy, że $\mathrm{udim}[0, a] = k < n$. Pokażemy, że wtedy a nie jest istotny w $\mathcal{L}$. Skoro $\mathrm{udim}[0, a] = k$, to z definicji wymiaru Goldiego istnieje skończony zbiór sumowo niezależny $\{a_1, \dots a_k\} \subseteq [0, a]$ taki, że $a_1 \vee \dots \vee a_k$ jest istotny w $[0, a]$ oraz kraty $[0, a_i]$ są jednolite. Z Uwagi 2.1.20 wiemy, że istnieje maksymalny sumowo niezależny zbiór X zawierający $\{a_1, \dots, a_k\}$. Pokażemy teraz, że $X \neq \{a_1, ..., a_k\}$. Jeśli tak nie jest, to nie istnieje x takie, że $(a_1 \vee ... \vee a_k) \wedge x = 0$. To jednak oznacza, że element $a_1 \vee \dots \vee a_k$ jest istotny w $\mathcal{L}$. Ponadto z założenia kraty $[0, a_i]$ są jednolite i zbiór $\{a_1, \dots, a_k\}$ jest sumowo niezależny. Wtedy jednak $\mathrm{udim}\mathcal{L} = k < n$ wbrew założeniu. Zatem rzeczywiście $X \neq \{a_1, ..., a_k\}$. Niech więc $x \in X \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Wtedy $(a_1 \vee \dots \vee a_k) \wedge x = 0$. Rozważmy element $(a_1 \vee \dots \vee a_k) \wedge (a \wedge x)$. Wtedy

$$(a_1 \vee \dots \vee a_k) \wedge (a \wedge x) \leqslant a_1 \vee \dots \vee a_k \text{ oraz}$$
$$(a_1 \vee \dots \vee a_k) \wedge (a \wedge x) \leqslant (a \wedge x) \leqslant x.$$

Stąd

$$(a_1 \vee \dots \vee a_k) \wedge (a \wedge x) \leqslant (a_1 \vee \dots \vee a_k) \wedge x = 0.$$

Ale $a \wedge x \in [0, a]$, zaś element $a_1 \vee \dots \vee a_k$ jest istotny w $[0, a]$. Zatem $a \wedge x = 0$, czyli element a rzeczywiście nie jest istotny w $\mathcal{L}$.

Dla pokazania implikacji przeciwnej załóżmy, że element a nie jest istotny w $\mathcal{L}$. Wówczas istnieje element $0 \neq x \in L$ taki, że $a \wedge x = 0$. Przypuśćmy teraz, że $\mathrm{udim}[0, a] = n$. Wtedy istnieje sumowo niezależny podzbiór $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq [0, a]$. Jednak $a_1 \vee \dots \vee a_n \leqslant a$, zatem $(a_1 \vee \dots \vee a_n) \wedge x \leqslant a \wedge x = 0$. Na mocy Lematu 2.1.19 zbiór $\{a_1, \dots, a_n, x\}$ jest zbiorem sumowo niezależnym, co jest sprzeczne z założeniem, że $\mathrm{udim}\mathcal{L} = n$.

2. Niech m_i oznacza $\mathrm{udim}[0, a_i]$. Z definicji wymiaru Goldiego oznacza to, że istnieje sumowo niezależny zbiór $\{b^i_1, \dots, b^i_{m_i}\}$ taki, że $b^i_1 \vee \dots \vee b^i_{m_i}$ jest istotny w $[0, a_i]$ oraz kraty $[0, b^i_j]$ są jednolite. Z Wniosku 2.2.13 wynika, że element $b^1_1 \vee \dots \vee b^1_{m_1} \vee \dots \vee b^n_1 \vee \dots \vee b^n_{m_n}$ jest istotny w kracie $[0, a_1 \vee \dots \vee a_n]$. Pozostaje wykazać, że zbiór $\{b^1_1, \dots, b^1_{m_1}, \dots, b^n_1, \dots, b^n_{m_n}\}$ jest sumowo niezależny. Skorzystamy z Lematu 2.1.19. Jest jasne, że zbiór $\{b^1_1\}$ jest sumowo niezależny. Załóżmy zatem, że zbiór $\{b^1_1, \dots, b^i_j\}$ jest sumowo niezależny. Możliwe są dwa przypadki: $m_i = j$ lub $m_i \neq j$. W przypadku gdy $m_i = j$ oczywiście $(b^1_1 \vee \dots \vee b^i_j) \wedge b^{i+1}_1 \leqslant (a^1 \vee \dots \vee a^i) \wedge a_{i+1} = 0$, zatem istotnie zbiór $\{b^1_1, \dots, b^i_j, b^{i+1}_1\}$ jest sumowo niezależny. W przypadku, gdy $m_i \neq j$ pokażemy, że $\{b^1_1, \dots, b^i_j, b^i_{j+1}\}$ jest sumowo niezależny. Podstawmy $x = b^i_{j+1}$, $y = b^1_1 \vee \dots \vee b^{i-1}_{m_{i-1}}$, $z = b^i_1 \vee \dots \vee b^i_j$ w tożsamości (3) z Lematu 2.1.13. Wówczas

$$\begin{aligned} y &= b^1_1 \vee \dots \vee b^{i-1}_{m_{i-1}} \leqslant a^1 \vee \dots \vee a^{i-1} \text{ oraz} \\ x \vee z &= b^i_1 \vee \dots \vee b^i_j \vee b^i_{j+1} \leqslant a^i. \end{aligned}$$

Zatem

$$y \wedge (x \vee z) \leqslant (a^1 \vee \dots \vee a^{i-1}) \wedge a^i = 0,$$

a stąd

$$x \wedge (y \vee z) = x \wedge ((y \wedge (x \vee z)) \vee z) = x \wedge z = b^i_{j+1} \wedge (b^i_1 \vee \dots \vee b^i_j) = 0,$$

ponieważ zbiór $\{b_1^i, \ldots, b_{m_i}^i\}$ jest sumowo niezależny. Zatem istotnie $\{b_1^1, \ldots, b_j^i, b_{j+1}^i\}$ jest sumowo niezależny.

Zbiór $\{b_1^1, \ldots, b_{m_k}^k\}$ spełnia warunek 2 Twierdzenia 2.2.14, zatem $\operatorname{udim}[0, a_1 \vee \ldots \vee a_k] = m_1 + \ldots + m_k$, co należało udowodnić. $\square$

2.3. Dualny wymiar Goldiego w kratach

Jak większość pojęć w kratach, także pojęcie wymiaru Goldiego ma wersję dualną. Skoro krata dualna do kraty modularnej jest modularna (Uwaga 2.1.12), to następująca definicja jest najprostsza.

Definicja 2.3.1. *Dualnym wymiarem Goldiego* kraty $\mathcal{L}$ nazywamy wymiar kraty Goldiego kraty do niej dualnej $\mathcal{L}^0$.

Spróbujemy jednak wyrazić definicję dualnego wymiaru Goldiego w języku samej kraty $\mathcal{L}$, a nie w języku kraty dualnej $\mathcal{L}^0$. Pozwoli to lepiej zrozumieć to pojęcie i sformułować jego jawną definicję.

Na początek przyjrzymy się pojęciu zbioru sumowo niezależnego. Niech $I \subseteq L$ będzie zbiorem sumowo niezależnym w $\mathcal{L}^0$. Zapisując, co to znaczy, w języku kraty $\mathcal{L}$, otrzymujemy następującą definicję.

Definicja 2.3.2. Podzbiór I zbioru $L \setminus \{0\}$ nazywamy *iloczynowo niezależnym* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego skończonego podzbioru $F \subseteq I$ i $x \in I \setminus F$ zachodzi $\bigwedge F \vee x = 1$, gdzie $\bigwedge F$ oznacza iloczyn wszystkich elementów F.

Przykład 2.3.3. W kracie M_3 zbiór $\{a, b\}$ jest iloczynowo niezależny. Inne przykłady zbiorów iloczynowo niezależnych w tej kracie to $\{a, c\}$ i $\{b, c\}$.

Przykład 2.3.4. Rozważmy kratę $\mathcal{P}(X)$. Pokażemy, że rodzina $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i \in I}$ podzbiorów X jest iloczynowo niezależna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary indeksów $i, j \in I$ zachodzi $Y_i \cup Y_j = X$. Jest jasne, że jeśli rodzina $\mathcal{Y}$ jest iloczynowo niezależna, to dla dowolnych $i \neq j$, $i, j \in I$ zachodzi $Y_i \cup Y_j = X$. Stosując oznaczenia z definicji zbioru iloczynowo niezależnego, wystarczy wziąć $F = \{Y_i\}$ oraz $x = Y_j$. Pokażemy, że jest to również warunek wystarczający. Niech $F = \{Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n}\}$ będzie podzbiorem $\mathcal{Y}$ i niech $x = Y_{i_{n+1}}$. Oczywiście $(Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_n}) \cup Y_{i_{n+1}} \subseteq X$. Udowodnimy również przeciwną inkluzję. Niech $a \in X$. Wtedy albo $a \in Y_{i_{n+1}}$, albo $a \notin Y_{i_{n+1}}$. Jeśli $a \in Y_{i_{n+1}}$, to także $a \in (Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_n}) \cup Y_{i_{n+1}}$. Jeśli zaś $a \notin Y_{i_{n+1}}$, to z założenia dla każdego $1 \leqslant j \leqslant n$ zachodzi $Y_{i_{n+1}} \cup Y_{i_j} = X$. Stąd $a \in Y_{i_j}$, a zatem $a \in Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_n}$. Zatem rzeczywiście $x \in (Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_n}) \cup Y_{i_{n+1}}$, czyli $X \subseteq (Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_n}) \cup Y_{i_{n+1}}$.

Jeśli element a jest istotny w kracie $\mathcal{L}^0$, to znaczy, że dla każdego $1 \neq x \in L$ zachodzi $a \vee x \neq 1$. Wprowadzamy zatem następującą definicję.

Definicja 2.3.5. Element $1 \neq a \in L$ nazywamy *małym* w $\mathcal{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu $1 \neq x \in L$ zachodzi $a \vee x \neq 1$.

Przykład 2.3.6. W kracie M_3 tylko element o jest mały.

Przykład 2.3.7. W kracie $\mathcal{P}(X)$ tylko zbiór $\emptyset$ jest mały. Jeśli $\emptyset \neq Y \subseteq X$, to wtedy $X \setminus Y \neq \emptyset$ oraz $X \cup (X \setminus Y) = X$. Zatem Y nie jest mały w $\mathcal{P}(X)$.

Następnie wprowadzamy definicję pojęcia dualnego do kraty jednolitej.

Definicja 2.3.8. Kratę $\mathcal{L}$ nazywamy *lekką* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element $1 \neq x \in L$ jest mały w $\mathcal{L}$.

Przykład 2.3.9. Krata M_3 nie jest lekka.

Przykład 2.3.10. Krata $\mathcal{P}(X)$ jest lekka wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem co najwyżej jednoelementowym. Jeśli X jest mocy większej niż 1, to istnieje w nim podzbiór $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Na mocy Przykładu 2.3.7 podzbiór Y nie jest mały, a zatem krata $\mathcal{P}(X)$ nie jest lekka. Jeśli X jest mocy co najwyżej 1, to w $\mathcal{P}(X)$ nie ma niepustych podzbiorów różnych od X. Zatem rzeczywiście $\mathcal{P}(X)$ jest lekka.

Przez dualizację Twierdzenia 2.2.14 otrzymujemy zatem takie twierdzenie.

Twierdzenie 2.3.11. *Następujące warunki są równoważne:*

1. *L nie zawiera nieskończonych zbiorów iloczynowo niezależnych,*
2. *L zawiera skończony iloczynowo niezależny zbiór $\{a_1, \ldots, a_n\}$ taki, że $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ jest mały w $\mathcal{L}$ i kraty $[a_i, 1]$ są lekkie dla $1 \leqslant i \leqslant n$,*
3. $\sup\{k \mid L$ *zawiera iloczynowo niezależny podzbiór mocy* $k\} = n < \infty$,
4. *dla każdego ciągu $\ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_1$ elementów L istnieje j takie, że dla wszystkich $k \geqslant j$ element a_j jest mały w $[a_k, 1]$.*

Dualny wymiar Goldiego kraty modularnej możemy zatem zdefiniować w następujący sposób.

Definicja 2.3.12. Mówimy, że krata modularna $\mathcal{L}$ ma *dualny wymiar Goldiego n* wtedy i tylko wtedy, gdy L zawiera skończony iloczynowo niezależny zbiór $\{a_1, \ldots, a_n\}$ taki, że element $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ jest istotny w L i kraty $[0, a_i]$ są lekkie dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Jeśli taki zbiór nie istnieje, to mówimy, że dualny wymiar Goldiego kraty $\mathcal{L}$ jest nieskończony. Dualny wymiar Goldiego kraty $\mathcal{L}$ oznaczamy przez $\mathrm{hdim}\mathcal{L}$.

Dualizując Wniosek 2.2.19 otrzymujemy:

Wniosek 2.3.13. *Niech* $\mathrm{hdim}\mathcal{L} = n < \infty$. *Wówczas*

1. *Jeśli $a \in L$, to* $\mathrm{hdim}[a, 1] \leqslant n$. *Nierówność jest ostra wtedy i tylko wtedy, gdy element a nie jest istotny w $\mathcal{L}$.*
2. *Jeśli zbiór $\{a_1, \ldots, a_k\}$ elementów L jest sumowo niezależny, to* $\mathrm{hdim}[a_1 \vee \ldots \vee a_k, 1] = \Sigma_{j=1}^{k} \mathrm{hdim}[0, a_j] \leqslant n$.

Policzmy dualny wymiar Goldiego dla kilku znanych nam przykładów krat.

Przykład 2.3.14. Dualny wymiar Goldiego lekkiej kraty modularnej wynosi 1.

Przykład 2.3.15. Dualny wymiar Goldiego kraty M_3 wynosi 2.

Przykład 2.3.16. Policzymy teraz dualny wymiar Goldiego kraty $\mathcal{P}(X)$. Jak już wiemy, jedyny mały element w tej kracie, to $\emptyset$. Szukamy skończonej rodziny podzbiorów $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ takiej, że $Y_i \cup Y_j = X$ oraz kraty $[Y_i, X]$ są lekkie. Oczywiście krata $[Y_i, X]$ jest izomorficzna z kratą $\mathcal{P}(X \setminus Y_i)$. Krata $[Y_i, X]$ jest lekka wtedy i tylko wtedy, gdy $X \setminus Y_i$ jest zbiorem jednoelementowym. Jeśli X jest zbiorem skończonym, to szukaną rodziną jest $\{X \setminus \{x\}\}_{x \in X}$ i $\mathrm{hdim}\mathcal{P}(X) = |X|$. Jeśli X jest zbiorem nieskończonym, to nie ma skończonej rodziny spełniającej wymienione warunki, zatem $\mathrm{hdim}\mathcal{P}(X) = \infty$.

Zauważmy, że dla kraty $\mathcal{P}(X)$ dualny wymiar Goldiego jest równy jej wymiarowi Goldiego. Nie jest to zaskakujące, bo krata $\mathcal{P}(X)$ jest izomorficzna ze swoją kratą dualną. Warto jednak zobaczyć, jak dualne pojęcia elementów istotnych i małych oraz krat jednolitych i lekkich funkcjonują w tej samej kracie.

Pojęcie dualnego wymiaru Goldiego dla krat formułuje się w sposób bardzo naturalny. W następnym rozdziale pokażemy, że zastosowanie go do modułów daje nietrywialne rezultaty. Przede wszystkim pozwala dobrze zrozumieć naturę wymiaru Goldiego dla modułów oraz dobrze zdefiniować dualny wymiar Goldiego dla modułów. Ponadto w języku krat łatwo jest przedstawić związki między różnymi definicjami dualnego wymiaru Goldiego przedstawionymi w rozdziale pierwszym.

Rozdział 3

Wymiar Goldiego w kracie podmodułów

W tym rozdziale zajmiemy się związkami między wymiarem Goldiego dla modułów i wymiarem Goldiego dla krat. Jak się okaże, przejście od wymiaru dla modułów do wymiaru dla krat jest bardzo naturalne i w istocie polega tylko na zmianie języka. Jednak zmiana sposobu patrzenia pozwala dobrze wyjaśnić naturę dualnego wymiaru Goldiego dla modułów. Niejasne związki między różnymi podejściami do dualnego wymiaru Goldiego wyrażone w języku krat stają się naturalne i klarowne.

3.1. Krata podmodułów i jej wymiar Goldiego

Łatwo jest poczynić następującą obserwację.

Uwaga 3.1.1. Niech $\mathcal{L}(M)$ oznacza zbiór podmodułów modułu M. Wtedy $\langle\, \mathcal{L}(M), +, \cap \,\rangle$ jest kratą z zerem i jedynką.

Dowód. Sprawdzimy, że zachodzą warunki (1)–(4) w definicji kraty. Niech N, P, Q będą dowolnymi podmodułami modułu M.

Jest oczywiste, że $N + N = N$ oraz $N \cap N = N$. Zatem istotnie działania $+$ i $\cap$ są idempotentne. Ponadto oczywiście $N \cap P = P \cap N$, więc mamy przemienność działania $\cap$. Przemienność $N+P = P+N$ w łatwy sposób wynika z przemienności działania $+$ w modułach, a łączność $(N+P)+Q = N+(P+Q)$ z łączności działania $+$ na elementach modułu. Warunek $(N \cap P) \cap Q = N \cap (P \cap Q)$ spełniony w sposób oczywisty.

Sprawdzimy, że zachodzą prawa pochłaniania. Jest oczywiste, że $N + (N \cap Q) \supseteq N$. Z drugiej strony $N \subseteq N$ oraz $(N \cap Q) \subseteq N$, zatem także $N + (N \cap Q) \subseteq N$. Istotnie więc zachodzi $N + (N \cap Q) = N$.

Pokażemy teraz, że zachodzi także warunek $N \cap (N + P) = N$. Jest oczywiste, że $N \cap (N + P) \subseteq N$. Aby pokazać inkluzję przeciwną, zauważmy, że oczywiście $N \supseteq N$ oraz $N + P \supseteq N$. Zatem zachodzi także $N \cap (N + P) \supseteq N$.

Zatem $\mathcal{L}(M)$ istotnie jest kratą. Oczywiście moduł zerowy jest najmniejszym elementem tej kraty (zerem), zaś moduł M jest jej elementem największym (jedynką). $\square$

Co więcej, ma miejsce następujący fakt.

Lemat 3.1.2. *Krata podmodułów $\langle\, \mathcal{L}(M), +, \cap \,\rangle$ jest kratą modularną.*

Dowód. Niech $X, Y, Z \subseteq M$ będą podmodułami M takimi, że $X \supseteq Z$. Wówczas oczywiście $X \cap Y \subseteq X \cap (Y+Z)$ oraz $X \cap Z \subseteq X \cap (Y+Z)$, zatem także $(X \cap Y)+(X \cap Z) \subseteq X \cap (Y+Z)$.

Udowodnimy teraz inkluzję przeciwną. Niech $x \in X \cap (Y+Z)$. Wówczas $x \in X$ oraz $x \in Y+Z$. Zatem istnieją $y \in Y$, $z \in Z$ takie, że $x = y+z$. Ponieważ $Z \subseteq X$, to $z \in X$. Zatem również $y = x - z \in X$. Mamy zatem $z \in X \cap Z$ oraz $y \in Y \cap Z$, a więc istotnie $x = y+z \in (X \cap Y)+(X \cap Z)$. □

Krata podmodułów $\mathcal{L}(M)$ jest kratą modularną z zerem i jedynką. Możemy zatem zastosować twierdzenia poprzedniego rozdziału do tej kraty. Zobaczymy najpierw, co oznaczają pojęcia kratowe w języku modułów.

Niech M będzie modułem. Zauważmy, że bycie istotnym elementem kraty $\mathcal{L}(M)$ oznacza dokładnie bycie istotnym podmodułem modułu M. A zatem krata $\mathcal{L}(M)$ jest jednolita wtedy i tylko wtedy, gdy moduł M jest jednolity. Ponadto fakt, że zbiór podmodułów X jest sumowo niezależny oznacza, że jeśli $N_1, \ldots, N_k \in X$, to suma $N_1 + \ldots + N_k$ jest prosta.

Ustaliwszy odpowiedniość między pojęciami kratowymi i modułowymi, możemy lepiej zrozumieć przedstawione twierdzenia. Lemat 2.2.11 wyrażony w języku modułów mówi, że własność bycia podmodułem istotnym jest przechodnia. Mamy zatem alternatywny dowód Uwagi 1.2.7 punkt 2. Z kolei Lemat 2.2.12 mówi, że istotność podmodułu zachowuje się przy braniu sumy prostej, a zatem odpowiada Lematowi 1.2.8.

Twierdzenie 2.2.14 zastosowane do kraty podmodułów $\mathcal{L}(M)$ daje następujący rezultat.

Twierdzenie 3.1.3. *Dla danego modułu M następujące warunki są równoważne:*

1. *M nie zawiera nieskończonego zbioru X niezerowych podmodułów takiego, że jeśli $N_1, \ldots, N_k \in X$, to suma $N_1 + \ldots + N_k$ jest prosta.*

2. *M zawiera niezerowe jednolite podmoduły $N_1, \ldots, N_n$ takie, że suma $N = N_1 + \ldots + N_n$ jest prosta i N jest istotnym podmodułem w M.*

3. $\sup\{k \mid M \textit{ zawiera sumę prostą } k \textit{ niezerowych podmodułów } \} = n < \infty$.

4. *Dla dowolnego ciągu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ podmodułów M istnieje j taki, że N_j jest istotnym podmodułem w N_k dla $k \geqslant j$.*

Zauważmy, że punkt 2 Twierdzenia 3.1.3 odpowiada Lematowi 1.2.17. Zatem wymiar Goldiego modułu M to po prostu wymiar Goldiego kraty podmodułów $\mathcal{L}(M)$. Twierdzenie 3.1.3 daje uzasadnienie poprawności definicji wymiaru Goldiego dla modułów, a także podaje charakterystykę modułów o skończonym wymiarze Goldiego, czyli odpowiada Wnioskowi 1.2.30. W istocie rzeczy jeśli uważnie przeczytać dowody, to dowód implikacji zawartej w dowodzie Lematu 1.2.27 jest identyczny z dowodem implikacji (1) $\Rightarrow$ (2) w dowodzie Twierdzeniu 2.2.14, zaś dowód Lematu 1.2.29 odpowiada dowodom implikacji (3) $\Rightarrow$ (4) i (4) $\Rightarrow$ (1) Twierdzenia 2.2.14.

3.2. Dualny wymiar Goldiego w kracie podmodułów

W tej części pracy zastosujemy wyniki poprzedniego rozdziału do kraty podmodułów. Kratowe spojrzenie pozwoli dobrze zrozumieć wymiar Goldiego dla modułów. Wyjaśnia ono także, dlaczego niektóre modułowe pojęcia dualizowane są w na pierwszy rzut oka dziwny i niezrozumiały sposób.

Na początek znajdziemy odpowiedniki pojęć kratowych w języku modułów. Podmoduł N jest małym elementem podkraty $\mathcal{L}(M)$ dokładnie wtedy, gdy moduł N jest małym podmodułem modułu M. Zatem krata $\mathcal{L}(M)$ jest lekka wtedy i tylko wtedy, gdy moduł M jest lekki. Co więcej, zbiór X jest iloczynowo niezależnym podzbiorem $\mathcal{L}(M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X podmodułów modułu M jest koniezależny.

Łatwo jest również zrobić następującą obserwację.

Uwaga 3.2.1. Jeśli N jest podmodułem modułu M, to podkrata $[N, M]$ kraty $\mathcal{L}(M)$ jest izomorficzna z kratą $\mathcal{L}(M/N)$ w naturalny sposób.

Dowód. Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie $f : [N, M] \to \mathcal{L}(M/N)$ dane wzorem $f(X) = X/N$ jest izomorfizmem krat. $\square$

Z Uwagi 3.2.1 można wyciągnąć wniosek, że podmoduł N jest mały w kracie $[K, M]$ wtedy i tylko wtedy, gdy podmoduł N/K jest mały w module M/K. Zgodnie z Definicją 1.3.3 mówimy wtedy, że N leży powyżej K w M. Zatem rzeczywiście jest to pojęcie dualne do bycia istotnym rozszerzeniem. Ponadto łatwo także stwierdzić, że krata $[N, M]$ jest lekka, wtedy i tylko wtedy, gdy moduł M/N jest lekki.

Twierdzenie 2.3.11 wyrażone w języku kraty podmodułów daje następujący rezultat.

Twierdzenie 3.2.2. *Dla dowolnego modułu M następujące warunki są równoważne:*

1. *M nie zawiera nieskończonego zbioru koniezależnego,*
2. *M zawiera koniezależną rodzinę podmodułów $\{N_1, \ldots N_n\}$ taką, że*
   (a) *$N_1 \cap \ldots \cap N_n$ jest małym podmodułem M,*
   (b) *M/N_i są lekkimi modułami dla $1 \leqslant i \leqslant n$.*
3. *$\sup\{k \mid M$ zawiera koniezależną rodzinę właściwych podmodułów mocy $k\} = n < \infty$.*
4. *Dla dowolnego ciągu $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ podmodułów modułu M istnieje j takie, że N_j leży powyżej N_k dla wszystkich $k \geqslant j$.*

Przyjmiemy zatem następującą definicję dualnego wymiaru Goldiego.

Definicja 3.2.3. Mówimy, że moduł M ma *dualny wymiar Goldiego n* wtedy i tylko wtedy, gdy M zawiera skończoną koniezależną rodzinę podmodułów $\{N_1, \ldots, N_k\}$ taką, że $N_1 \cap \ldots \cap N_k$ jest małym podmodułem M i M/N_i są lekkimi modułami dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Jeśli taka rodzina nie istnieje, to mówimy, że dualny wymiar Goldiego dla modułu M jest nieskończony. Dualny wymiar Goldiego modułu M oznaczamy $\mathrm{hdim}(M)$.

Zauważmy, że punkt 1 Twierdzenia 3.2.2 odpowiada definicji Takeuchiego 1.3.7, punkt 4 odpowiada definicji Reitera 1.3.8. Używając Lematu 1.3.12 można zauważyć, że punkt 3 stwierdza, iż nie może istnieć epimorfizm z M na skończoną sumę prostą więcej niż n składników. Zatem warunek 3 jest równoważny definicji Varadarajana 1.3.11. Twierdzenie 3.2.2 mówi, że definicje Takeuchiego, Reitera i Varadarajana są równoważne przyjętej przez nas definicji dualnego wymiaru Goldiego, a zatem są także równoważne sobie nawzajem. Jednocześnie konstrukcja wymiaru Goldiego w kracie podmodułów jest bardzo eleganckim i klarownym wyjaśnieniem związków między tymi definicjami. Ujawnia ona naturę dualnego wymiaru Goldiego dla modułów i stanowi przekonujący intuicyjny argument, że przyjęta definicja charakteryzuje właściwe pojęcie.

Bibliografia

[1] P. Fleury, *A note on dualizing Goldie dimension*, Canadian Mathematical Bulletin, 17 (1974) 511–517.

[2] A.W. Goldie, *The structure of prime rings under ascending chain conditions*, Proc. London Math. Soc., 8 (1958) 589–608.

[3] P. Grzeszczuk, E. Puczyłowski, *On Goldie and dual Goldie dimensions*, Journal of Pure and Applied Algebra, 31 (1984) 47–54.

[4] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag 1999

[5] C. Lomp, *On Dual Goldie dimension*, Diplomarbeit, Dusseldorf 1999

[6] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, *Dimensions of Ring Theory*, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[7] E. Reiter, *A dual to the Goldie ascending chain condition on direct sums of submodules*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 73 (1981) 55–63.

[8] T. Takeuchi, *On cofinite-dimensional modules*, Hokkaido Mathematical Journal, 5 (1976) 1–43.

[9] K. Varadarajan, *Dual Goldie dimension*, Communications in Algebra, 7 (1979) 565–610.