Zadania z egzaminów z Algorytmiki

1 Najkrótsze ścieżki

Zadanie 1 Dany jest spójny graf nieskierowany $G = (V, E)$ z wagami na krawędziach $w : E \to \mathbb{N}$ oraz cztery wyróżnione wierzchołki a, b, c, d. Należy wybrać jak najlżejszy podzbiór krawędzi $S \subseteq E$ (tj. o możliwie małej sumie wag) taki, że używając krawędzi S można zbudować ścieżkę od a do b oraz od c do d.
Punktacja: Algorytm $\tilde{O}(|E|)$: 10p, $\tilde{O}(|V| \cdot |E|)$: 5p.

2 Przepływy i skojarzenia

Zadanie 2 W rozgrywkach bierze udział n drużyn, każda gra dwa mecze z każdą pozostałą. Każdy mecz kończy się wygraną jednej z drużyn. Rozgrywki wygrywa drużyna, która wygra najwięcej meczy (może być kilku zwycięzców rozgrywek). Zaprojektuj algorytm, który mając dane wyniki pewnej liczby początkowych meczów rozstrzygnie, czy dana drużyna P ma jeszcze szansę wygrać rozgrywki. Podaj złożoność swojego algorytmu w zależności od n.

Zadanie 3 Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą zbiorami. *System różnych reprezentantów* (SRR) dla rodziny zbiorów $\{A_1, \ldots, A_n\}$ to dowolny zbiór n elementów X taki, że istnieje funkcja różnowartościowa $r : \{1, \ldots, n\} \to X$ taka, że $r(i) \in A_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$. (Inaczej, każdy zbiór A_i ma w X innego reprezentanta).

Zaprojektuj efektywny algorytm, który mając dane dwie rodziny podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ oraz $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$, znajdzie *wspólny system różnych reprezentantów dla* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ (tzn. zbiór, który jest SRR zarówno dla $\mathcal{A}$, jak i dla $\mathcal{B}$), lub stwierdzi, że taki system nie istnieje. Oszacuj złożoność swojego algorytmu w zależności od rozmiaru danych.

Przykład. Dla $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}\}$ oraz $\mathcal{B} = \{\{4, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ istnieje wspólny SRR, mianowicie $\{2, 3, 4, 5\}$.

Uwaga. Można założyć (tracąc 2 punkty), że zbiory A_i oraz B_j są podzbiorami zbioru $\{1, \ldots, k\}$, dla pewnej niewielkiej (np. ograniczonej przez wielomian od rozmiaru danych) liczby k.

Zadanie 4 Na szachownicy $n \times n$ ustawiono pewną liczbę figur szachowych (białych i czarnych). Dysponując dowolną liczbą króli (białych i czarnych) należy je ustawić na wszystkich wolnych polach szachownicy tak, aby zminimalizować całkowitą liczbę par pól szachownicy (a, b) takich, że na polu a znajduje się biała figura, która atakuje czarną figurę na polu b. (Każda figura szachowa atakuje pewną liczbę pól szachownicy, np. król atakuje wszystkie 8 sąsiednich pól.)

Zaprojektuj efektywny algorytm dla tego problemu i oszacuj jego złożoność.

Zadanie 5 Rozważmy sieć przepływową $N = (G = (V, E), c, s, t)$. Krawędź $e \in E$ jest *górno-krytyczna* gdy po powiększeniu jej przepustowości zwiększy się wartość maksymalnego przepływu w sieci. Podobnie, krawędź $e \in E$ jest *dolno-krytyczna* gdy po pomniejszeniu jej przepustowości zmniejszy się wartość maksymalnego przepływu w sieci.

a) (2p) Pokaż, że istnieje sieć, w której zbiór krawędzi górno-krytycznych jest różny od zbioru krawędzi dolno-krytycznych.

b) (8p) Podaj algorytm, który znajduje wszystkie krawędzie górno-krytyczne w danej sieci N.

c) (10p) Podaj algorytm, który znajduje wszystkie krawędzie dolno-krytyczne w danej sieci N.

W punktach b) i c) oceniamy złożoność czasową algorytmów i uzasadnienie ich poprawności.

Zadanie 6 Mówimy, że graf G jest *grafem Kőniga*, jeśli rozmiar najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w G jest równy rozmiarowi największego skojarzenia w G. Podaj wielomianowy algorytm, który rozstrzygnie, czy dany graf jest grafem Kőniga.

Wskazówka: Przypominamy, że maksymalne skojarzenie w dowolnym (niekoniecznie dwudzielnym) grafie można znaleźć w czasie $O(m\sqrt{n})$.

3 Klasa złożoności NP

Zadanie 7 Udowodnij, że następujący problem jest NP-zupełny:
Instancja:
Formuła φ w postaci 2-CNF o m klauzulach, ciąg liczb naturalnych $w_1, \ldots, w_m$ i liczba $W \in \mathbb{N}$. Dla $i = 1, \ldots, m$, liczbę w_i będziemy nazywać *wagą* i-tej klauzuli w formule φ.
Pytanie:
Czy istnieje wartościowanie zmiennych formuły φ, przy którym całkowita waga spełnionych klauzul wynosi co najmniej W?
Wskazówka:
Użyj problemu Independent Set.

Zadanie 8 Dane są trzy macierze $n \times n$ o elementach całkowitych, A, B i C. Opisz algorytm randomizowany typu Monte Carlo, który sprawdzi, czy $A \cdot B = C$ w czasie $O(n^2)$ i z prawdopodobieństwem błędu nie większym niż $\frac{1}{n}$.
Wskazówka. Zauważ, że dla niezerowej macierzy D *nieczęsto się zdarza*, żeby $Dx = 0$.

Zadanie 9 Udowodnij, że następujący problem jest NP-zupełny:

Egzemplarz:
Graf nieskierowany $G = (V, E)$.
Pytanie:
Czy w G istnieje klika rozmiaru co najmniej $|V|/2$?

Zadanie 10 Rozważmy następujący problem optymalizacyjny („problem dwóch komiwojażerów"). Dla danego zbioru wierzchołków V i funkcji wagowej $w : V^2 \to \mathbb{N}$ znaleźć dwa cykle C_1 i C_2, takie że $V(C_1) \cup V(C_2) = V$ i $V(C_1) \cap V(C_2) = \emptyset$ oraz waga cięższego z cykli jest minimalna, tzn. należy zminimalizować $\max\{w(C_1), w(C_2)\}$, gdzie $w(C_i) = \sum_{(u,v)\in E(C_i)} w(u, v)$ dla $i = 1, 2$.

Udowodnij, że nie istnieje algorytm wielomianowy dla problemu dwóch komiwojażerów, o ile P $\neq$ NP.

Zadanie 11 *Podmacierzą* macierzy A nazywamy dowolną macierz B która powstaje z A poprzez usunięcie pewnej liczby wierszy i/lub kolumn. Rozważmy następujący problem

optymalizacyjny. Dane są dwie macierze liczb całkowitych A i B. Należy wyznaczyć maksymalną (pod wzgledem liczby elementów) macierz, która jest równocześnie podmacierzą macierzy A i macierzy B

Udowodnij, że nie istnieje algorytm wielomianowy dla tego problemu, o ile P $\neq$ NP.

Zadanie 12 *Drzewem rozpinającym* w grafie nieskierowanym $G = (V, E)$ nazywamy dowolne drzewo $T = (V, E_T)$ takie, że $E_T \subseteq E$. *Wierzchołkiem wewnętrznym* w drzewie nazywamy dowolny wierzchołek stopnia (w drzewie) co najmniej 2. Udowodnij, że następujący problem jest NP-zupełny:

EGZEMPLARZ:
Graf nieskierowany $G = (V, E)$, liczba $k \in \mathbb{N}$.
PYTANIE:
Czy w G istnieje drzewo rozpinające o co najwyżej k wierzchołkach wewnętrznych?

Wskazówka. Użyj problemu pokrycia zbioru (SET COVER).

Zadanie 13 W problemie pakowania trójek (3-SET PACKING) danych jest n zbiorów 3-elementowych i liczba $k \in \mathbb{N}$. Należy sprawdzić czy wśród tych n zbiorów jest k zbiorów rozłącznych. Pokaż, że problem 3-SET PACKING jest NP-zupełny.

WSKAZÓWKA: Użyj problemu 3-SAT.

4 Programowanie liniowe

Zadanie 14 Rozważmy następujący problem optymalizacyjny.

Sieć odcinków autostrad ma budowę drzewa $T = (V, E)$. Za odcinek autostrady odpowiadający każdej krawędzi drzewa pobierana jest opłata (w obie strony taka sama). Przez sieć autostrad zamierza przejechać k pojazdów. Dla $i = 1, \ldots, k$ dane są wierzchołki $s_i, t_i \in V$ oraz liczba $b_i \in \mathbb{N}$. Dla każdego $i = 1, \ldots, k$, pojazd i-ty jedzie od wierzchołka s_i do t_i (najkrótszą ścieżką). Należy wyznaczyć takie opłaty za przejazd poszczególnymi odcinkami autostrady $p : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, aby dla każdego i suma opłat na ścieżce od s_i do t_i nie przekraczała b_i oraz całkowity zysk (suma opłat zebranych od kierowców) był jak największy.

1. Pokaż, że problem ten można rozwiązać w czasie wielomianowym (5p).
2. Pokaż, że problem ten można rozwiązać w czasie wielomianowym także wtedy, gdy T jest scieżką, ale wymagamy, aby opłaty były liczbami naturalnymi (5p).

Lakoniczna wskazówka: Programowanie liniowe i całkowita unimodularność.

5 Aproksymacja

Zadanie 15 Rozważmy następujący problem MAX-MIN-EDGE-COLORING. Dany jest graf nieskierowany. Należy każdej krawędzi przypisać kolor tak, żeby a) każdy wierzchołek był incydentny z co najwyżej dwoma kolorami, oraz b) zmaksymalizować liczbę użytych kolorów. Zaproponuj (wielomianowy) algorytm c-aproksymacyjny, dla pewnej stałej $c \in (0, 1)$.

UWAGA. W tym zadaniu oceniamy przede wszystkim analizę współczynnika aproksymacji. Za algorytm $\frac{1}{2}$-aproksymacyjny (z analizą) bonus 5 punktów.

Zadanie 16 Ścieżką Hamiltona nazywamy ścieżkę prostą zawierającą wszystkie wierzchołki grafu. W metrycznym problemie ścieżki komiwojażera dany jest graf pełny $G = (V, E)$ oraz symetryczna funkcja wagowa $w : V^2 \to \mathbb{N}$ spełniająca nierówność trójkąta. Celem jest znalezienie ścieżki Hamiltona o minimalnej wadze.

a) (7p) Podaj algorytm 3/2-aproksymacyjny dla problemu ścieżki komiwojażera.

b) (10p) Podaj algorytm 3/2-aproksymacyjny dla wariantu problemu ścieżki komiwojażera, gdzie dany jest dodatkowo wierzchołek $s \in V$ i szukamy ścieżki o minimalnej wadze spośród ścieżek Hamiltona o końcu w s.

c) (20p) Podaj algorytm 5/3-aproksymacyjny dla wariantu problemu ścieżki komiwojażera, gdzie dane są dodatkowo wierzchołki $s, t \in V$ i szukamy ścieżki o minimalnej wadze spośród ścieżek Hamiltona o końcach w s i t.

Uwaga 1. Udowodnij oszacowanie na współczynnik aproksymacji swojego algorytmu oraz uzasadnij, że ma on złożoność wielomianową (stopień wielomianu nie gra roli).

Uwaga 2. Podpunkt c) wydaje się nam trudny/trickowy i należy go traktować jako zadanie dodatkowe.

Zadanie 17 *Pokryciem wierzchołkowym* w grafie nieskierowanym $G = (V, E)$ nazywamy dowolny podzbiów $S \subseteq V$ taki, że dla każdej krawędzi $uv \in E$ mamy $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$. Mówimy, że pokrycie wierzchołkowe S jest spójne, gdy podgraf indukowany przez S (tzn. graf $G[S] = (S, \{xy \in E \ : \ x, y \in S\})$) jest spójny.

Zaproponuj algorytm aproksymacyjny dla problemu znajdowania najmniejszego spójnego pokrycia wierzchołkowego. Udowodnij poprawność swojego algorytmu i oszacuj współczynnik aproksymacji.

Punktacja: współczynnik aproksymacji $c = O(1)$ daje ≥ 5 punktów, $c \leq 2$ daje 10 punktów.

Zadanie 18 Rozważmy następujący problem optymalizacyjny. Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$ oraz funkcja wagowa $w : V \to \mathbb{N}$. Dla dowolnego $S \subseteq V$ *wagą* zbioru S nazywamy $w(S) = \sum_{v \in S} w(v)$. Należy znaleźć taki zbiór $S \subseteq V$, że $G - S$ nie zawiera trójkątów oraz $w(S)$ jest najmniejsze możliwe. Zaproponuj wielomianowy algorytm 3-aproksymacyjny dla tego problemu (stopień wielomianu nie ma wpływu na punktację, ale prosimy o dokonanie analizy złożoności czasowej). Precyzyjnie udowodnij poprawność swojego algorytmu i oszacowanie na współczynnik aproksymacji.

Uwaga. Można rozwiązać uproszczoną wersję zadania, w której wszystkie wagi są takie same (wtedy chodzi o znalezienie jak najmniejszego zbioru S takiego, że $G - S$ nie zawiera trójkątów). Za takie rozwiązanie można uzyskać 60% punktów.

Zadanie 19 Jako autokrata, chcesz kontrolować pewną grupę ludzi V. Niektórym członkom tej grupy chcesz założyć podsłuch. W tej grupie ludzi przewodzą Alicja i Bob; oni mają dobrze zabezpieczone domy, im podsłuchu założyć nie można, ale każdemu innemu członkowi grupy można założyć podsłuch. Zbiór E zawiera wszystkie pary osób, które się znają. Podzbiór $R \subseteq E$ zawiera pary osób, które mają ze sobą romans; romanse są tylko między kobietą i mężczyzną, ale jedna osoba może mieć wiele romansów. Mając dany graf $G = (V, E)$, wyróżnione wierzchołki a (Alicja) i b (Bob), oraz zbiór $R \subseteq E$ chcesz wyznaczyć najmniejszy zbiór osób, którym należy założyć podsłuchy tak, by

(a) każda informacja przekazywana między Alicją i Bobem łańcuchem znających się osób była podsłuchana

(b) w każdej parze która ma romans, choć jedna osoba była podsłuchiwana.

Zaproponuj algorytm aproksymacyjny dla powyższego problemu. Uzasadnij jego poprawność, przeprowadź analizę współczynnika aproksymacji i złożoności czasowej.

Do uzyskania maksymalnej liczby punktów wystarczy 2-aproksymacja.

Zadanie 20 Dany jest graf skierowany $G = (V, E)$. Należy znaleźć największy (pod względem liczby krawędzi) podgraf acykliczny (nie zawierający cykli skierowanych).

Zaproponuj algorytm aproksymacyjny dla powyższego problemu. (Współczynnik aproksymacji 2 wystarczy aby dostać maksymalną liczbę punktów.) Udowodnij oszacowanie na współczynnik aproksymacji Twojego algorytmu oraz uzasadnij, że Twojego oszacowania nie da się poprawić (tzn. pokaż że ten współczynnik jest faktycznie osiągany dla pewnego grafu).

6 Algorytmy parametryzowane

Zadanie 21 Dany jest graf o maksymalnym stopniu 3 i liczba naturalna k. Należy znaleźć podgraf o maksymalnej liczbie krawędzi spośród podgrafów o k wierzchołkach. Zaproponuj algorytm Monte-Carlo działający w czasie $2^{O(k)}n^{O(1)}$ dla tego problemu.

Wskazówka: wylosuj podzbiór wierzchołków i znajdź w nim rozwiązanie.

Zadanie 22 W problemie pakowania trójek (3-SET PACKING) danych jest n zbiorów 3-elementowych i liczba $k \in \mathbb{N}$. Należy sprawdzić czy wśród tych n zbiorów jest k zbiorów rozłącznych. Pokaż dowolny algorytm dla tego problemu (może być randomizowany typu Monte-Carlo) działający w czasie $2^{O(k)}n^{O(1)}$.

Uwaga. 70% punktów można otrzymać za nieco prostszą wersję: algorytm randomizowany Monte-Carlo, działający w czasie $k^{O(k)}n^{O(1)}$.

Zadanie 23 Mamy dany nieskierowany n-wierzchołkowy graf, w którym każdy wierzchołek jest biały lub czarny. Mamy również dane dwie liczby naturalne k_1, k_2. Należy znaleźć spójny podgraf G z *dokładnie* k_1 białymi i k_2 czarnymi wierzchołkami, lub stwierdzić że nie ma takiego podgrafu. Zaproponuj randomizowany algorytm typu Monte Carlo dla powyższego problemu, działający w czasie $2^{O(k_1+k_2)}n^{O(1)}$.

Zadanie 24 Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$ oraz liczby naturalne k i ℓ. Należy stwierdzić, czy istnieje ścieżka k-wierzchołkowa P taka, że co najwyżej ℓ wierzchołków z $V \setminus V(P)$ sąsiaduje z wierzchołkami P. Parametrem jest liczba $p = k + \ell$. Podaj algorytm parametryzowany dla tego problemu (może być randomizowany Monte-Carlo).

Złożoność algorytmu ma wpływ na ocenę, ale dowolny algorytm parametryzowany (z uzasadnieniem poprawności i analizą złożoności) otrzymuje 10 pkt.

Zadanie 25 W problemie Squad Formation dany jest graf dwudzielny $G = (U, R, E)$ oraz liczby naturalne d i t. Elementy U reprezentują użytkowników, a elementy R to zasoby. Krawędź ur dla $u \in U$ i $r \in R$ oznacza, że użytkownik u ma dostęp do zasobu r. Należy zdecydować, czy można wybrać d drużyn, każda po co najwyżej t osób tak, że każda drużyna A ma dostęp do wszystkich zasobów, tzn. $\bigcup_{u \in A} N(u) = R$.

a) (wersja łatwiejsza, 10 pkt) Opisz algorytm FPT dla problemu Squad Formation parametryzowanego przez $k = \max\{d, |R|\}$.

b) (wersja trudniejsza, 15 pkt) W problemie Resiliency Control dane są podobne jak powyżej, lecz mamy dodatkowo daną liczbę naturalną s. Należy zdecydować, czy dla dowolnego zbioru S użytkowników mocy co najwyżej s, można wybrać opisanych d drużyn ze zbioru $U \setminus S$ (np. gdy użytkownicy z S zachorują). Opisz algorytm FPT dla problemu Resiliency Control parametryzowanego przez $k = \max\{d, |R|\}$.

Uwaga. Łatwo zauważyć, że algorytm FPT dla parametryzacji $k = \max\{d, |R|\}$ to równoważnie algorytm o złożoności $f(d, |R|)n^{O(1)}$, dla pewnej funkcji obliczalnej f.

Zadanie 26 W problemie Max Cut mamy dany nieskierowany graf $G = (V, E)$, a celem jest znalezienie takiego podziału $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$, który maksymalizuje liczbę krawędzi między X i Y.

Podaj algorytm, który mając dany n-wierzchołkowy graf G i jego dekompozycję drzewową o szerokości t, rozwiązuje problem Max Cut w czasie $O(p^t n^q)$, dla pewnych stałych p, q. Uzasadnij jego poprawność i oszacuj złożoność.

Zadanie 27 W problemie Odd Cycle Transversal mamy dany nieskierowany graf $G = (V, E)$, a celem jest znalezienie najmniejszego zbioru wierzchołków $S \subseteq V$ takiego, że dowolny cykl nieparzystej długości w G ma wierzchołek w S.

Podaj algorytm, który mając dany n-wierzchołkowy graf G i jego dekompozycję drzewową o szerokości t, rozwiązuje problem Odd Cycle Transversal w czasie $O(p^t n^q)$, dla pewnych stałych p, q.

Wskazówka: Dowolny cykl nieparzystej długości ma wierzchołek w S wtw gdy $G \setminus S$ jest dwudzielny.

7 Randomizacja

Zadanie 28 Rozważmy następujący algorytm randomizowany, który znajduje pokrycie wierzchołkowe w danym grafie $G = (V, E)$.

Zacznij od pustego pokrycia C. Dopóki istnieje nie pokryta krawędź xy (tzn. $x, y \notin C$), wylosuj jeden z końców tej krawędzi (z równym prawdopodobieństwem) i dodaj go do C.

Udowodnij, że jeśli OPT jest rozmiarem najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w G, to $\mathbb{E}[|C|] \leq 2\text{OPT}$.

Zadanie 29 W problemie ważonego pokrycia wierzchołkowego dany jest graf $G = (V, E)$ oraz funkcja $w : V \to \mathbb{N}$ i należy znaleźć pokrycie wierzchołkowe C takie, że jego waga $w(C) = \sum_{v \in C} w(v)$ jest najmniejsza możliwa.

Rozważmy zmodyfikowany algorytm z poprzedniego zadania, w którym dodajemy x do C z prawdopodobieństwem $\frac{w(y)}{w(x)+w(y)}$ a w przeciwnym przypadku dodajemy y. Udowodnij, że jeśli OPT jest najmniejszą możliwą wagą pokrycia wierzchołkowego w G, to $\mathbb{E}[w(C)] \leq 2\text{OPT}$.

8 Szybkie mnożenie macierzy i FFT

Zadanie 30 *Cykl indukowany* w grafie nieskierownym G to cykl bez cięciw, tzn. taki cykl $C = v_1 v_2 \cdots v_{|C|}$ w G, że dla dowolnych $1 \leq i < j \leq |C|$ mamy $v_i v_j \in E(G)$ wtedy i tylko wtedy gdy $j - i = 1$ lub $i = 1, j = |C|$.

Zaproponuj efektywny algorytm, który w danym n-wierzchołkowym grafie znajdzie:

a) (5p) klikę K_6,

b) (8p) indukowany cykl C_6,

c) (10p) dowolny (podany na wejściu) podgraf 6-wierzchołkowy.

Uwaga. Możesz założyć, że graf jest gęsty, tzn. zawiera $\Omega(n^2)$ krawędzi. Twój algorytm może być deterministyczny lub randomizowany typu Monte-Carlo.

Zadanie 31 Dany jest ciąg n liczb ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$, reprezentujący nominały n monet. Zaproponuj algorytm o złożoności $\tilde{O}(n^2)$, który dla każdego $i = 1, \ldots, n^2$ obliczy czy da się z danych monet ułożyć kwotę i.