1 Twierdzenie Mengera

Zajmujemy się następującym twierdzeniem

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Mengera). *Dla danego grafu G i rozłącznych podzbiorów jego wierzchołków $A, B \subset V(G)$. Jeśli aby odseparować A od B trzeba wyjąć z G conajmniej k wierzchołków to A i B łączy k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek.*

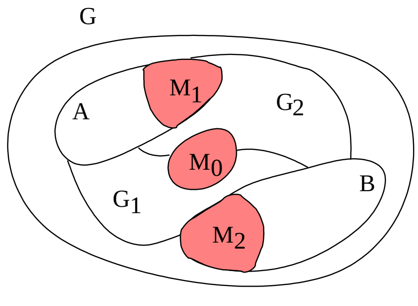
Uproszczona wersją tego twierdzenia w której zbiory A i B są jednowierzchołkowe daje nam kryterium na k-spójność grafu

Twierdzenie 2. *Dla danego grafu G i różnych wierzchołków $a, b \in V(G)$. Jeśli aby odseparować a od b trzeba wyjąć conajmniej k wierzchołków to a i b łączy k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek.*

Fajnym ćwiczeniem (którego nie umiem odowodnić ;-) jest pokazanie powyższego twierdzenia dla $k = 2$. Tzn w dwuspójnym grafie każde dwa wierzchołki leżą na cyklu.

Dowód twierdzenia Mengera. Bierzemy dowolny graf $G = (V, E)$. Dowodzimy twierdzenia przez indukcję ze względu na $|E|$. Jeśli dla pewnej krawędzi e w grafie $G - e$ zbiorów A i B nie można odseparować mniej niż k wierzchołkami to możemy zastosować założenie indukcyjne do grafu $G - e$. A i B są w nim połączone k rozłącznymi wierzchołkowo ścieżkami, tym bardziej są połączone k rozłączymi wierzchołkowo ścieżkami w G co kończy dowód w tym przypadku. Załóżmy więc, że po wyjęciu dowolnej krawędzi A można odseparować od B $k - 1$ wierzchołkami
Przypadku gdy $V = A \cup B$ pokazujemy, że graf jest dwudzielny. Dla dwudzielnego grafu musimy dowieść, że $|max\ matching| = |vertex\ cover|$, gdzie *max matching* to największe skojażenie w grafie a *vertex cover* to najmniejszy zbiór wierzchołków pokrywających krawędzie (każda krawędź grafu ma co najmniej jeden koniec w tym zbiorze). Dowód powyższego faktu znajduje się w Lipskim. Nie będziemy się nim zajmowali.

Wyrzućmy z grafu G wierzchołek r_0 stopnia > 0 spoza $A \cup B$ otrzymując graf G'. Teraz niech wierzchołki $r_1, r_2, \ldots r_{k-1}$ separują A od B w G'. Oznaczmy $\{r_0, \ldots r_{k-1}\} = M$. Oczywiście wierzchołki z M separują A od B w G. Rozbijmy M na trzy zbiory M_1, M_2 i M_0 zawierające punkty z A, B, spoza $A \cup B$.
W grafie G ścieżki o początku w $A - M$ i końcu w zbiorze $M - A$, o wewnętrznych wierzchołkach spoza M tworzą graf G_1. Analogiczne ścieżki o początku w $B - M$ i koncu w $M - B$ tworzą graf G_2.

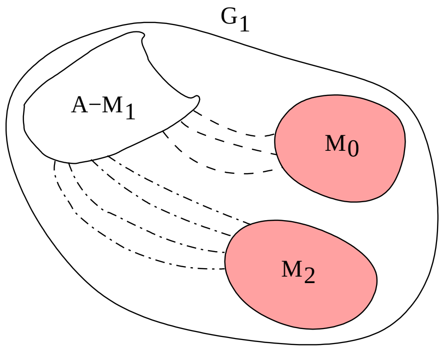


Prosta obserwacja: grafy G_1 i G_2 są wierzchokowo rozłączne poza M oraz są krawędziowo rozłączne (w innym wypadku mielibyśmy ścieżkę z A do B omijającą zbiór M).

Po wyjęciu z G $k - 1$ wierzchołków $r_1, \ldots r_{k-1}$ A i B łączy ścieżka. Przechodzi ona przez r_0. Wynika stąd, że grafy G_1 i G_2 są niepuste, zatem zarówno $|E(G_1)| < |E(G)|$ jak i $|E(G_2)| < |E(G)|$.

Stosujemy założenie idukcyjne do G_1 i zbiorów wierzchołków $A_1 = A - M_1$, $B_1 = M_0 \cup M_2$. Wiemy, że do odseparowania A_1 od B_1 w G_1 potrzeba co najmniej $|M_0 \cup M_2|$ wierzchołków. Załóżmy przeciwnie, że mamy w G_1 zbiór $|M'| < |M_0 \cup M_2|$ separujący A_1 od B_1. Wtedy zbiór $M_1 \cup M'$ separuje A od B w G i jest to zbiór mniejszy niż M.

G



Na mocy założenia indukcyjnego mamy w G_1 rozłączne wierzchołkowo ścieżki:

- $|M_2|$ ścieżek z $A - M_1$ do M_2
- $|M_0|$ ścieżek z $A - M_1$ do M_0

analogicznie w G_2 mamy

- $|M_1|$ ścieżek z $B - M_2$ do M_1
- $|M_0|$ ścieżek z $B - M_2$ do M_0

Zlepiamy ścieżki o końcach w M_0 otrzymując $|M_0| + |M_1| + |M_2| = k$ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek pomiędzy A i B w grafie G.

$\square$