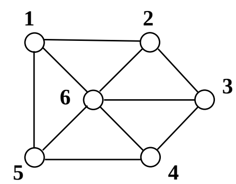
Grafy

Definicja grafu (nieskierowanego)

Grafem nazywamy parę zbiorów (V, E). Elementy zbioru V nazywają się *wierzchołkami*, natomiast elementy zbioru E nazywają się *krawędziami*. Każda krawędź jest parą wierzchołków, tzn. $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$

Zamiast pisać $\{u, v\}$ na oznaczenie krawędzi łączącej wierzchołki u i v będziemy pisać u–v. Zawuażmy, że w powyższej definicji rozważamy pary *nieuporządkowane*, tzn. u–v = v–u.

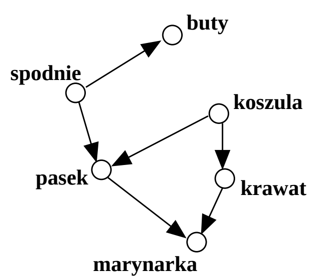


$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad E = \{1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 6–5, 6–1, 2–6, 3–6, 4–6\}$$

Grafy skierowane

Czasami chcemy, żeby każda krawędź miała początek i koniec, tzn. żeby pary były *uporządkowane*. Wtedy: $E \subseteq V \times V = \{(u, v) : u, v \in V\}$.

Krawędź (u, v) najłatwiej wyobrazić sobie jako strzałkę od u do v, dlatego często będziemy oznaczać ją przez $u \to v$.



$V = \{spodnie, buty, pasek, koszula, krawat, marynarka\}$
$E = \{spodnie \to buty, spodnie \to pasek, pasek \to koszula, koszula \to krawat, pasek \to marynarka, krawat \to marynarka\}$

Podstawowe pojęcia

Niech $e = u$–v będzie krawędzią. Mówimy, że e jest *incydentna* z wierzchołkami u i v. Mówimy też, że u jest *sąsiadem* v oraz v jest sąsiadem u.

Stopniem wierzchołka v w grafie nieskierowanym G nazywamy liczbę krawędzi z nim incydentnych i oznaczamy $d_G(v)$.

Mówimy, że krawędź $u \to v$ jest krawędzią *wychodzącą* z wierzchołka u i *wchodzącą* do wierzchołka v.

Stopniem wyjściowym wierzchołka v w grafie skierowanym G nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z v w G. Analogicznie def. *stopień wejściowy*.

Ścieżka długości k łącząca wierzchołki u i v w grafie $G = (V, E)$ jest ciągiem wierzchołków $(v_0, v_1, \dots v_k)$ takim że $v_0 = u$, $v_k = v$ oraz $v_{i-1}–v_i \in E$ dla $i = 1, 2 \dots k$.

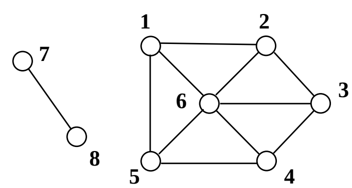
Analogicznie definiujemy ścieżkę w grafie skierowanym, ale wtedy $v_{i-1} \to v_i \in E$ dla $i = 1, 2 \dots k$.

Ścieżka jest *prosta*, jeśli jej wierzchołki się nie powtarzają.

Ścieżkę $p = (v_0, v_1, \dots v_k)$ nazywamy *cyklem*, gdy $v_0 = v_k$.

Odległość między wierzchołkami u i v w grafie nieskierowanym to długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v. Oznaczenie $d(u, v)$.

Odległość od wierzchołka u do wierzchołka v w grafie skierowanym to długość najkrótszej ścieżki od u do v. Oznaczenie też $d(u, v)$.



Przykład: $d(1, 4) = 2$, Przyjmujemy $d(1, 7) = \infty$.

Graf H nazywamy podgrafem grafu G, gdy każdy wierzchołek H jest też wierzchołkiem G oraz gdy każda krawędź H jest też krawędzią G, tzn. $V(H) \subseteq V(G)$ oraz $E(H) \subseteq E(G)$

Graf nieskierowany nazywamy *spójnym*, gdy dla dowolnych dwóch wierzchołków u i v istnieje ścieżka łącząca te wierzchołki.

Spójną składową grafu G nazywamy maksymalny spójny podgraf grafu G (maksymalny, tzn. nie można już nic dołożyć bo przestanie być spójny).

Przykład (poprzedni rysunek): Ten graf nie jest spójny, ma 2 spójne składowe. Czy $(V = \{1\}, E = \{1–6\})$ jest jego podgrafem ? Podaj przykład podgrafu.