1. Wykazać, że jesli $a_n > 0, b_n > 0$ prawie wszystkich n i istnieje granica skończona $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ to ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n-1}{n^4-3n^2+5n+5}$ jest zbieżny.

3. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n-1}{n^3-3n^2+5n+5}$ jest rozbieżny.

4. Wykazać, że szereg harmoniczny rzędu r czyli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ jest zbieżny dla $r > 1$ i rozbieżny dla $r \leqslant 1$.

Wsk. Dla $r > 1$ grupować wyrazy od $\frac{1}{(2^k)^r}$ do $\frac{1}{(2^k+2^k-1)^r}$. Taka grupa ma 2^k wyrazów, największy to $\frac{1}{(2^k)^r}$. Szereg majoryzuje się szeregiem geometrycznym.

5. Zbadać zbieżność szeregu

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$.

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$.

6. Dla jakich x jest zbieżny szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

7. Zbadać zbieżność szeregu.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{3^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{5n^2+3}{3n^2-n+1})^n$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n 3^{n+1}}{5^{n+2}}$.

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{3^n+4^{n+1}}$.

7. Zbadać zbieżność. Jeśli szereg jest zbieżny to podaj, czy jest zbieżny bezwzględnie czy warunkowo.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\frac{3n+2}{4n+3})^n$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\frac{3}{5})^n$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n}}$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{\sqrt[n]{2n}}$.

8. Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^n (2n)!} x^n$.

Odpowiedzi na następnej stronie.

1. i 2. Skorzystać z 1.

5. (a) zbieżny, (b) zbieżny, (c) zbieżny, (d) rozbieżny, (e) rozbiezny, (f) zbieżny.

kryterium d'Alemberta.

6. Dla wszystkich x jest zbieżny bezwzględnie. Kryt. d'A.

7. (a) zbieżny, (b) zbieżny, (c) rozbieżny, (d) rozbieżny, (e) rozbieżny.

kryterium Cauchy'ego.

7. (a) zbiezny bezwzględnie, (b) zbieżny bezwzględnie, (c) zbieżny warunkowo, (d) rozbieżny.

8. (a) 1, (b) 3, (c) e^{-1}, (d) $\frac{4}{9}e$.