

1. Zbadać różniczkowalność funkcji

$$(a) f(x) = x|x|, (b) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dla } x \geq 1 \\ x^3 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = x^2 + |x^2 - 4|.$$

2. Znaleźć parametry a, b, c , dla których podane funkcje są różniczkowalne wszędzie.

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ ax + b & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 4x & \text{dla } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 3 - 2x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Obliczyć pochodne

$$(a) f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{3}, (b) f(x) = \arcsin \sqrt[4]{1 - 5x}, (c) f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^x}),$$
$$(d) f(x) = x^x, (e) f(x) = (\sin \frac{2^x + 1}{3^x + 1})^5.$$

4. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć

$$(a) (f^{-1})'(y) \text{ dla :}$$

$$(i) f(x) = 3^{-x}, (ii) f(x) = \ln(x + 3), x > -3, (iii) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x > 0.$$

$$(b) (f^{-1})'(e + 1) \text{ gdzie } f(x) = x + \ln x.$$

$$(c) (f^{-1})'(1) \text{ gdzie } f(x) = \cos x - 3x.$$

$$(d) (f^{-1})'(4) \text{ gdzie } f(x) = x^3 + 3^x.$$

5. Obliczyć w przybliżeniu, porównać z wynikiem kalkulatora.

$$(a) \sqrt[3]{7,99}, (b) e^{0,04}, (c) \arccos 0,499, (d) \frac{1}{\sqrt[3]{3,98}} (e) \operatorname{tg} 44^\circ 55', (f) \ln 0,9993.$$

6. Napisać równania stycznych do wykresy w podanych punktach.

(a) $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$, $(1, f(1))$.

(b) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$, $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$.

(c) $f(x) = \ln(x^2 + e)$, $(0, f(0))$.

(d) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $(1, f(1))$.

(e) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-x}{1+x}$, $(1, f(1))$.

Odpowiedzi na drugiej stronie.

1. (a) różniczkowalna wszędzie, (b) nieróżniczkowalna w 0, (c) różniczkowalna wszędzie, (d) różniczkowalna wszędzie, (e) nieróżniczkowalna w -2, 2.

2. (a) $a = 4, b = -5$, (b) $a = -3, b = 4$.

3. (a) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}} \cdot \frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{1-5x}} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{(1-5x)^3}} \cdot (-5)$, (d) $\frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^x}} \cdot (e^x + \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot e^x)$,
(e) $5(\sin \frac{2^x+1}{3^x+1})^4 \cdot \cos(\frac{2^x+1}{3^x+1}) \cdot \frac{2^x(3^x+1) \ln 2 - (2^x+1)3^x \ln 3}{(3^x+1)^2}$

4. (a) (i) $\frac{-1}{y \ln 3}$, (ii) e^y , (c) $\frac{y}{y^2-1}$, (b) $\frac{e}{e+1}$, (c) $-\frac{1}{3}$, (d) $\frac{1}{3+3 \ln 3}$.

5. (e) $44^\circ 55' = 45^\circ - 5' = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2160}$.

6. (a) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \frac{\pi}{6}$, (b) $y = 2e(x - \frac{\pi}{4}) + e$, (c) $y = 1$, (d) $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$,
(e) $y = -\frac{1}{2}(x-1)$.