1. Znaleźć przedziały monotoniczności

(a) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$, (b) $f(x) = x \ln x$, (c) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$, (d) $f(x) = x + \sin x$, (e) $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$, (f) $f(x) = e^x \cos x$, (g) $f(x) = \sqrt{9x - x^3}$, (h) $f(x) = x - \arcsin \frac{x}{2}$, (i) $f(x) = 4x + \operatorname{ctg} x$.

2. Uzasadnić nierówności

(a) $|\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b| \leqslant |a - b|$ dla $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $\ln \frac{b}{a} < b - a$ dla $1 \leqslant a < b$.

(c) $x \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0 \leqslant x < 1$.

(d) $e^x > ex$ dla $x > 1$.

(e) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$ dla $0 < a, b$ i $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

3. Uzasadnić tożsamożci

(a) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x$ dla $x \in (-1, 1)$.

(c) $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{1+x}$ dla $x \in (-1, \infty)$.

(d) $\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$.

4. Funkcja $f(x)$ spełnia warunek Lipschitza na przedziale P jeśli istnieje liczba L taka, że $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ dla $x, y \in P$.

(a) Dowieść, że funkcja $f(x) = e^x$ spełnia warunek L. na przedziale $< -10, 10 >$. Czy spełnia warunek na (∞, ∞)?

(b) Dowieść, że funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ spełnia warunek L. na przedziale $< 0, \frac{\pi}{3} >$. Czy spełnia ten warunek na $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(c) Dowieść, że funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ spełnia warunek L. na $< 1, 10 >$. Czy spełnia na $(0, 10 >$.

(d) Wykazać, że jesli $x, y \geqslant 2$ to $x^5 - y^5 \geqslant 80(x - y)$ przy czym równość zachodzi tylko wtedy gdy $x = y$.

(e) Dowieść, że dla $x, y \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ zachodzi $|\sin x - \sin y| \geqslant \frac{1}{2}|x - y|$ przy czy równość zachodzi tylko wtedy gdy $x = y$.

(f) Wykazać, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\frac{1}{2}|x-y| \leqslant |x+\frac{1}{2}\sin x-(y+\frac{1}{2}\sin y)| \leqslant |\frac{3}{2}|x-y|$$

.

Odpowiedzi.

1. (a) rosnąca na $(-\infty,-1),(1,\infty)$. Malejąca na (-1,1).

(b) rosnąca na (e^{-1},∞), malejąca na $(0,e^{-1})$.

(c) rosnąca na $(1,\infty)$, malejąca na (0,1).

(d) wszędzie rosnąca

(e) rosnąca na $(3,\infty)$, malejąca na $(-\infty,2),(2,3)$.

(f) rosnaąca na predziałach postaci $(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi)$, malejąca na $(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi)$.

(g) rosnąca na $(0,\sqrt{3})$, malejąca na $(-\infty,-3),(o,\sqrt{3})$.

(h) rosnąca na $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, malejąca na $(-2,-\sqrt{3}),(\sqrt{3},2)$.

(i) rosnąca na $(\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi)$, malejąca na reszcie.

2. (a) zastosować tw. lagrange'a.

(b) tw.Lagrange'a

(c) tw.Lagrange,a dla przedziału $<0,x>$ dla funkcji $\arcsin x$.

(d) tw. lagrange'a dla $<1,x>$.

(e) tw.Lagrange'a dla funckcji x^n dla przedziału $<a,b>$.

3. Rożniczkować, pochodna jest równa wszędzie 0, zatem funkcja jest stała. Obliczyć tę stałą obliczając wartość dla pewnego x, najlepiej dla 0.

4. (a) tw.lagrange'a dla przedziału $< -10, 10 >$. Jesli na całym $\mathbb{R}$ to istnieje stała L, że $e^x - 1 \leqslant L(x-1)$ dla $x > 1$. Stąd $\frac{e^x-1}{x-1} < L$ dla $x > 1$. Ale granica $\frac{e^x-1}{x-1}$ przy $x \to \infty$ jest równa $+\infty$ (np. z reguły de l'Hospitala). mamy sprzeczność.

(b) Leśli $\operatorname{tg} x < Lx$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ to biorąc granicę przy $x \to \frac{\pi}{2}^-$ otrzymujemy sprzeczność.

(c) Podobnie jak w (b). Nie spełnia na $(0, 10 >)$.

(d) Rozpatrzyć funkcję odwrotną do x^5 czyli $\sqrt[5]{y}$ i zastosować do niej tw. Lagrange'a.

(e) Rozpatrzyć $\arcsin y$. Nierówność można przepisać jako

$$|\arcsin x - \arcsin y| \leqslant 2|x-y|$$

dla $x, y \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ i zastosować tw. Lagrange'a.

(f) Rozpatrzyć funkcję odwrotną do funkcji $4x + \frac{1}{2}\sin x$ (istnieje?), przepisać nierówność używając oznaczenia tej funkcji i zastosować tw. Lagrange'a.