1.$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,, $f'''(x) = \frac{-3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

Wzór Mclaurina $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(c)$ gdzie c jest pewną liczbą między 0 a x tzn $c \in (-|x|, |x|)$. Zatem $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\frac{-3c}{(1+c^2)^{\frac{5}{2}}}$. Dla $x = 1$ mamy $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$ przy czym wartość bezwzględna błędu jest równa $\frac{3c}{2(1+c^2)^{\frac{5}{2}}}$, $c \in (0,1)$. Można to szacować tak : $\frac{3c}{2(1+c^2)^{\frac{5}{2}}} \leqslant \frac{3}{2}$ bo $0 \leqslant c \leqslant 1$. Jest to grube szacowanie. Można ambitniej czyli znaleźć największą wartoś funkcji $\frac{x^3}{6}\frac{3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ na przedziale $[0,1]$, patrz zadanie 4.

2. Wyznaczyć extrema lokalne i punkty przegięcia funkcji
$g(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

Dziedzina: $x \neq 0$. $g'(x)$=$e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$. $g'(x) > 0$ dla $x < 0$ lub $x > 1$, $g'(x) < 0$ dla $x \in (0,1)$, $g'(x) = 0$ dla $x = 1$. Zatem funkcja ma minimum lokalne w $x = 1$. $g''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$.W przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja jest wklęsła, w przedziale $(0,\infty)$ jest wypukła. Nie ma punktów przegięcia.

3. Wykazać, że $\ln x > 2x - \frac{x^2+3}{2}$ dla każdego $x > 1$.

Rozpatrzmy funkcję $F(x) = \ln x - 2x + \frac{x^2+3}{2}$. mamy
$F'(x) = \frac{1}{x} - 2 + x$=$\frac{1-2x+x^2}{x}$=$\frac{(1-x)^2}{x} > 0$ na przedziale $(1,\infty)$. Zatem funkcja $F(x)$ jest rosnąca dla $x > 1$. Ponieważ $F(1) = 0$ to

$F(x) > 0$ dla $x > 1$ a to znaczy, że $\ln x > 2x - \frac{x^2+3}{2}$ dla $x > 1$.

4. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji
$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\frac{1}{x}$ na przedziale $[e^{-1}, e]$.

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Szukamy miejsc zerowych $F'(x)$ w danym przedziale. Wychodzi $x = 1$. Obliczamy $F(e^{-1}) = e - 1$, $F(e) = e^{-1} + 1$, $F(1) = 1$. Największa wartość to $e - 1$, najmniejsza 0.

5. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu figury
$0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x+1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ wokół (a) osi $0x$, (b) osi $0y$.

5. (a) $V = \int\limits_0^1 \pi(x+1)dx = \pi(\frac{x^2}{2} + x)|_0^1 = \frac{3\pi}{2}$.
(b) Przy obrocie wokół os Oy otrzymujemy walec o wysokości $\sqrt{2}$ i promieniu podstawy 1 z wydrążonym krzywym stożkiem. Objętość walca wynosi $\pi\sqrt{2}$. Teraz objętość "stożka". Tniemy stożek płaszczyzną prostopadłą do osi Oy na wysokości y. Otrzymamy koło o promieniu $x = y^2 - 1$ (bo $y = \sqrt{x+1}$). y zmienia się od 1 do $\sqrt{2}$. Zatem objętość 'stożka" jest równa $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \pi(y^2-1)^2 dy = \pi(\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y)|_1^{\sqrt{2}}$. Obliczyć i odjąć od objętości walca.

6. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$$
.

To jest symbol $[\frac{-\infty}{-\infty}]$. stosujemy regułę de l'Hospitala. Ta granica jest równa granicy $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x}{x \cos x} = [\frac{0}{0}] = (\mathrm{H}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\cos x - x\sin x} = 1$.

7. Wyznaczyć wszystkie x, dla których jest zbieżny szereg

$$\sum_{n=1} \frac{n}{n^3+1} x^n.$$

To jest szereg potęgowy. Obliczamy promień zbieżności. $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^3+1}}}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, natomiast granice mianownika mozna obliczyć szacując;

$$n^3 \leqslant n^3 + 1 \leqslant 2n^3$$

więc

$$\sqrt[n]{n}^3 \leqslant \sqrt[n]{n^3+1} \leqslant n\sqrt[n]{2}.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+1} = 1$. Otrzymujemy, że $R = \frac{1}{1} = 1$. Zatem szereg jest napewno zbieżny dla $-1 < x < 1$ i rozbieżny gdy $|x| > 1$. Dla $x = -1$ lub $x = 1$ szereg wartości bezwzględnych jest równy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$. Mamy $\frac{n}{n^3+1} \leqslant \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Z kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ jest zbieżny.
Odp. Szereg jest zbieżny dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$.