Egzamin z Algebry, 22.06.2016

Proszę odpowiedzieć na wszystkie pytania. Proszę dokładnie uzasadniać odpowiedzi.

1. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ istnieje izometria F płaszczyzny afinicznej $\mathbb{R}^2$, która prostą $3x - 4y = -4$ przekształca na prostą $x = a$ a punkt $(6, a)$ na punkt (3,1). Dla każdego takiego a wyznaczyć liczbę takich izometrii. Znaleźć wzór jednej z nich.

2. Forma kwadratowa na $\mathbb{R}^3$ jest dana wzorem $q(x_1, x_2, x_3) = (1-a^2)x_1^2+x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3 - 2x_2x_3$. Dla jakich a istnieje podprzestrzeń liniowa $W \subset \mathbb{R}^3$ taka, że $\dim W = 2$ i $q(x) = 0$ dla każdego $x \in W$. Znaleźć wszystkie takie W. Zbadać określoność i półokreśloność q w zależności od a.

3. Wyznaczyć centrum grupy $\mathbb{Z}_2 \times S_3$. Wskazać w tej grupie 4-elementową podgrupę, która nie jest podgrupą normalną. Wskazać 3-elementową podgrupę normalną F. Ile jest homomorfizmów $\mathbb{Z}_2 \times S_3/F \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

4. Wykazać, że pierścień $P = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ jest ciałem. Ile elementów ma P. Znaleźć element odwrotny do $[x]$ ($[x]$=warstwa elementu x).

5. Niech I, J będą ideałami w pierścieniu P. Niech IJ oznacza ideał w P generowany przez wszystkie iloczyny ij gdzie $i \in I, j \in J$. Wykazać, że $IJ \subset I \cap J$. Podać przykład, gdzie $IJ \subsetneq I \cap J$. Wyznaczyć $I \cap J$ gdzie $I = (24)$, $J = (20) + (30)$, ideały w $\mathbb{Z}$.