1. Zbadać czy są monotoniczne ciągi:

(a) $a_n = \frac{4n-2}{3n+1}$, (b) $b_n = n^2 + 3n - 1$, (c) $c_n = \sin n\frac{\pi}{2}$, (d) $d_n = \frac{1}{2^n} - n$.

2. Które wyrazy ciągu różnią się od podanej liczby g o mniej niż $0,01$ jeśli

(a) $a_n = 3 + \frac{2}{n}$, $g = 3$; (b) $b_n = \frac{2-3n}{n+2}$, $g = -3$; (c) $c_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$, $g = 1$; (d) $d_n = \sqrt[n]{3}$, $g = 1$.

3. Obliczyć granicę ciągu (a_n) jeśli:

(a) $a_n = \frac{2n^6-3n^2+5}{-3n^4+n^3+n^2-10}$, (b) $a_n = \frac{(2n-1)(n^2+n+1)}{5-n^3+7n^2}$,

(c) $a_n = \frac{n^3+4n^{17}-20n+12}{-n^5+4n^4-n^3+2}$, (d) $a_n = \frac{n^2+\sqrt{n}-2}{3n^2+n+3}$,

(e) $a_n = (\frac{2n-1}{n+1})^4$, (f) $a_n = 2^n + 3n - 1$,

(g) $a_n = \sqrt{3n-1} + \frac{1}{n}$, (h) $h_n = \frac{5}{\sqrt{3n+2}}$,

(i) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$, wsk. skorzystać z $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$, (j) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3 \cdot 4^n + 2 \cdot 5^n}$,

(k) $a_n = (1 + \frac{2}{n})^n$, (l) $a_n = (1 + \frac{3}{n+1})^{2n+1}$,

(m) $a_n = -12n^7 + 5n^6 - n^4 + 2$, (n) $a_n = (\frac{n+3}{n})^{2-n}$.

(o) $a_n = (\frac{2n^2-n+1}{n^2+1})^n$.

(r) $a_n = (\frac{2n^2-n+1}{3n^2+1})^n$.

4. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. Wykazać, że jeśli ciąg (a_n) jest ograniczony to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

6. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$. Ogólniej $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^q}{a^n} = 0$ jeśli $q > 1, a > 1$.

7. Wykazać, że dla istnieje liczba N taka, że dla $n > N$ zachodzi nierówność $\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt[3]{2n}}$.

Odpowiedzi na drugiej stronie.

1. (a) rosnący, (b) rosnący, (c) nie jest monotoniczny; jest to ciąg 1,0,-1,0,1,0,-1,0,..., (d) malejący.

2. (a) dla $n > 200$, (b) dla $n > 798$, (c) dla $n \geqslant 10$, (d) dla $n > \frac{\log 3}{\log 1{,}01} = 110,40$ czyli dla $n \geqslant 111$.

3. (a) $-\infty$, (b) -2, (c) $-\infty$, (d) $\frac{1}{3}$, (e) 16, (f) $+\infty$, (g) $+\infty$, (h) 0, (i) 0, (j) 5, (k) e^2, (l) e^6, (m) $-\infty$, (n) e^{-3}, (o) $+\infty$, (r) 0.

4. Dla dużych n zachodzi $a_n^2 < \varepsilon^2$. Zatem dla dużych n $|a_n| < \varepsilon$.

5. Użyć twierdzenia o 3 ciągach.

6. Jeśli $a > 1$ to $b = \sqrt[q]{a} > 1$. Wystarczy więc udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} = 0$. Napisać $b = 1+h$ i skorzystać z $(1+h)^n \geqslant \binom{n}{2} h^2$.

7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})$ (por.zad.3i).