ZESTAW III

(1) Niech $f: D \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną w kole $D = \{z : |z| < 1\}$ przyjmującą wartości rzeczywiste na odcinkach $[0, \frac{1}{2}e^{2i\alpha}]$, $[0, \frac{1}{2}e^{2i\beta}]$, gdzie $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in [0, \pi)$. Wykazać, że jeśli f nie jest funkcją stałą, to $\alpha - \beta = \frac{k}{m}\pi$, gdzie k, m – całkowite.

(2) Niech $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ będzie pętlą kawałkami gładką i niech $S \subset \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ będzie nieograniczonym zbiorem spójnym. Wykazać, że $Ind(\gamma, z) = 0$, dla $z \in S$.

(3) Niech $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie pętlą kawałkami gładką. Załóżmy, że $Im(\gamma(a)) > 0$ oraz istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $Im(\gamma(c)) < 0$, droga $\gamma|[a,c]$ nie przecina $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ i droga $\gamma|[c,b]$ nie przecina $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$. Wykazać, że $Ind(\gamma, 0) = -1$.

(4) Niech γ będzie kawałkami liniową parametryzacją łamanej zamkniętej $[w_0, w_1, \ldots, w_m, w_0]$ nie zawierającej zera. Ustalmy $a \in \mathbb{C}$ takie, że $0 \notin [a, w_j]$, $j = 0, \ldots, m$, niech T_j będzie trójkątem o wierzchołkach a, w_j, w_{j+1}, gdzie $w_{m+1} = w_0$ i niech $\sigma(T_j) = 0$, jeśli $0 \notin T_j$ oraz $\sigma(T_j) = 1$ ($\sigma(T_j) = -1$) jeśli $0 \in T_j$ i obrzeg T_j jest zgodny (niezgodny) ze standardową orientacją płaszczyzny. Pokazać, że $Ind(\gamma, 0) = \sum_{j=0}^{m} \sigma(T_j)$.

(5) Wykazać, że dla $\lambda \in (1, +\infty)$ równanie $z e^{\lambda - z} = 1$ ma w kole $\{z : |z| < 1\}$ dokładnie jeden pierwiastek.
[Wskazówka: Dla $|z| = 1$, $|(ze^{\lambda - z} - 1) - ze^{\lambda - z}| < |ze^{\lambda - z}|$]

(6) Niech $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Pokazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n, równanie $a(z-b)\cos z - \sin z = 0$ ma w kole $D_n = \{z : |z| \leq \pi n\}$ $2n+1$ pierwiastków, przy czym pierwiastki o dostatecznie dużym module są jednokrotne.
[Wskazówka: Pokazać, że dla dostatecznie dużych n, jeśli $z \in \partial D_n$ to $|\tan z| < |a||z-b|$ i rozpatrzyć funkcje $f(z) = a(z-b)\cos z$ oraz $g(z) = f(z) - \sin z$].

(7) Wyznaczyć liczbę pierwiastków, liczonych z krotnościami:
(A) wielomianu $z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$
(i) w kole $\{z : |z| \leq 1\}$ (b) w kole $\{z : |z| \leq 2\}$
(B) w pierścieniu $\{z : 1 \leq |z| \leq 2\}$, dla wielomianu
(i) $2z^5 - 6z^2 + z + 1$ (b) $z^8 + z^2 - 16$.

(8) Wyznaczyć liczbę pierwiastków, liczonych z krotnościami, leżących w półpłaszczyźnie $Re\, z \geq 0$, dla wielomianu
(A) $z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$
(B) $z^5 - z + 16$
(C) $z^4 - z^3 + 8z^2 - 4z + 4$
(D) $-z^7 - 4z^5 + z^4 + 8z^2 + 4$

(9) Niech f będzie funkcją holomorficzną określoną w otoczeniu koła $D=\{z: |z|\le 1\}$. Wykazać, że jeśli $f(D)\subset D\setminus\partial D$, to f ma dokładnie jeden punkt stały.

[Wskazówka: Zauważyć, że dla $z\in\partial D$, $|(z-f(z))-z|<|z|$].

(10) (A) Niech $D=\{z: |z|<r\}$ i niech $f(z)=z^n g(z)$, gdzie $g: D\to\mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną i $g(0)\neq 0$. Pokazać, że dla pewnego $s\in(0,r)$, w kole $D_s=\{z: |z|<s\}$ jest określona funkcja $h(z)=cz\exp\left(\frac{1}{n}\operatorname{Log}\left(\frac{g(z)}{g(0)}\right)\right)$ spełniająca warunki $h^n=f$ i $h'(0)\neq 0$.

[Wskazówka: Dobrać s tak, żeby $\operatorname{Re}\left(\frac{g(z)}{g(0)}\right)>0$ dla $z\in D_s$]

(B) Pokazać, że jeśli dla funkcji holomorficznej $f: U\to\mathbb{C}$, $f(z_0)=w_0$ i z_0 jest zerem n-krotnym funkcji $f-w_0$, to istnieje koło $E=\{z: |z-z_0|<\varepsilon\}$ i przekształcenie konforemne $h: E\to h(E)$ takie, że $f(z)=w_0+h(z)^n$, dla $z\in E$.

(11) Niech $f: U\to\mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, $D=\{z: |z|\le 1\}\subset U$ i niech moduł $|f|$ będzie stały na ∂D oraz f' nie zeruje się na ∂D.

(A) Pokazać, że funkcja f ma w kole D o jedno zero więcej niż pochodna f', przy czym zera liczone są z krotnościami.

[Wskazówka: Zauważyć, że dla pewnej funkcji gładkiej $\beta: [0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(e^{it})=ce^{i\beta(t)}$, $N_f=\frac{1}{2\pi}(\beta(2\pi)-\beta(0))$ i znaleźć odpowiednią formułę dla $N_{f'}$.]

(B) Pokazać, że jeśli pochodna f' nie zeruje się na D, to funkcja f jest różnowartościowa na $D\setminus\partial D$.

[Wskazówka: Skorzystać z (A). Zauważyć, że dla $|w|<|f(1)|$, funkcja $f-w$ ma co najwyżej jedno zero na D].