1. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wyznaczyć prostą przechodzącą przez punkt (5,-4,4,0) i przecinającą płaszczyzną H i prostopadłą do H jeśli

(a) $H = (1, -2, 1, 1) + lin((1, 1, 1, 2), (1, 1, 0, -1))$.

(b) $H : x_1 + 5x_2 + x_4 = 10, 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -1$.

2. W $\mathbb{R}^4$ wyznaczyć płaszczyznę przechodzącą przez punkt (2,-1,3,5) i prostopadłą do płaszczyzny $(7, 2, -3, 4) + lin((-1, 3, 2, 1), (1, 2, 3, -1))$.

3. Wyznaczyć odległość między płaszczyznami $x_1+3x_2+x_3+x_4 = 3, x_1+3x_2-x_3+2x_4 = 6$ oraz $(0, 2, 6, -5) + lin((-7, 1, 1, 1), (-10, 1, 2, 3))$.

4. Znaleźć wzór jakiejkolwiek izometrii $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takiej, że $F(0, 0) = (1, 0)$ i F przekształca prostą $x + y = 1$ na prostą $y = a$. Znaleźć a. Ile jest takich izometrii?

5. Znaleźć wzór na symetrię prostopadłą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem prostej af((1,1,1), (1,0,1)).

6. Znaleźć bazę ortonormalną w $\mathbb{R}^3$, w której forma $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ jest diagonalna. Obliczyć rząd i sygnaturę. Zbadać określoność .

7. Znaleźć przekształcenie samosprzężone $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i bazę $\mathcal{A}$ takie, że $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

8. Niech $q(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$. Znaleźć wszystkie podprzestrzenie liniowe W w $\mathbb{R}^3$ takie, że $\dim W = 2$ i $q(x) = 0$ dla każdego $x \in W$.

9. Czy istnieje izometria, która przekształca płaszczyznę $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ na płaszczyznę $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ a prostą $(1, 0, 1) + lin((1, 1, 1))$ na prostą $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, x_2 + x_3 = 1$.

10. Ile jest homomorfizmów $S_3 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$. Wyznaczyć jeden z nietrywialnych.

11. Niech $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0\}$. Niech $H = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R}\}$.

(a) Udowodnić, że H jest podgrupą normalną w G.

(b) $G/H \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ gdzie $\mathbb{R}^*$ oznacza grupę multyplikatywną ciała $\mathbb{R}$.

12. Niech G będzie p-grupą a X zbiorem wszystkich podgrup w G. Dla $g \in G$ i $H \in X$ definujemy $\Phi_g(H) = gHg^{-1}$. Wykazać, że przyporządkowanie $g \to \Phi_g$ definiuje działanie na zbiorze X. Wykazać, że liczba podrup w G nie będących normalnymi jest podzielna przez p.

13. Załóżmy , że H jest podgrupą normalną w G a F podgrupą w H. Załóżmy, że H jest grupą cykliczną. Pokazać, że F jest podgrupą normalną w G.

14. Jeśli F_1, F_2 są podgrupami w G to F_1F_2 oznacza zbiór wszystkich iloczynów xy gdzie $x \in F_1, y \in F_2$. W grupie G dana jest podgrupa normalna H i podgrupa F. Wykazać, że

(a) HF jest podgrupą w G.

(b) H jest podgrupą normalną w HF.

(c) $F \cap H$ jest podgrupą normalną w F.

15. Wyznaczyć wszystkie podgrupy normalne w D_8. Wyznaczyć odpowiednie grupy ilorazowe. Ile jest homomorfizmów $D_8 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$?

16. Wyznaczyć grupę automorfizmów grupy

(a) Z_p, (b) S_3, (c) $\mathbb{Z}_2 \times Z_2$, (d) $\mathbb{Z}_2 \times Z$.

17. Wyznaczyć wszystkie podgrupy w grupie cyklicznej rzędu 100.

18. Czy grupa $\mathbb{Z}_{15}^*$ jest cykliczna? A $\mathbb{Z}_{16}^*$?

19. Udowodnić, że grupa ilorazowa $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ nie jest grupą cykliczną.

20. Ile jest podgrup rzędu 3 i 6 w niecyklicznej grupie abelowej rzędu 18?

21. Ile jest elementów rzędu 2, 4, 6 w $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$.

Wskazówka do zadań 22,23: jeśli $x, y \in \mathbb{C}$ to $|x \cdot y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$. $|x|$ oznacza moduł liczby zespolonej x.

22. Czy element a jest nierozkładalny w pierścieniu A.

Def. Element $a \in A$ jest rozkładalny jeśli jest iloczynem dwóch elementów nieodwracalnych.

(a) $a = 7 - i$, $A = \mathbb{Z}[i]$; (b) $a = 2 + 3i\sqrt{5}$, $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

$\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ oznacza podpierścień w $\mathbb{C}$ generowany przez $\mathbb{Z}$ oraz i. Zatem $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Podobnie $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

23. Wyznaczyć rozkład elementu $45 - 15i$ na iloczyn czynników nierozkładalnych w $\mathbb{Z}[i]$.

24. Czy ideał $(x, x^3 - 7)$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$ jest ideałem głownym? Jest ideałem maksymalnym?

25. Niech $\phi\colon A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni.

(a) Wykazać, że jeśli J jest ideałem w B to przeciwobraz $\phi^{-1}(J)$ jest ideałem w A.

(b) wykazać, że jeśli ϕ jest epimorfizmem i I jest ideałem w A to $\phi(I)$ jest ideałem w B.

(c) Podać przykład wskazujący, że założenie o epimorfizmie jest istotne.

(d) Udowodnić, że jesli J jest ideałem pierwszym w B to $\phi^{-1}(J)$ jest ideałem pierwszym w A. Czy jeśli J jest maksymalny to $\phi^{-1}(J)$ jest maksymalny.

26. Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy $\mathbb{Z}[x]/(x^3) \to \mathbb{Z}_6$.

27. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $A = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \text{ i } p \text{ nie dzieli } b\}$. Wykazać, że A jest podpierścieniem w Q. Znaleźć elementy nierozkładalne w A, znaleźć

elementy odwracalne w A. Czy A jest pierścieniem ideałów głownych. Wskazać konkretny ideał maksymalny I w A wyznaczyć A/I.

28. Dla jakich $a, b \in \mathbb{Z}_2$ pierścienie ilorazowe $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + ax + b)$

(a) są izomorficzne, (b) są ciałami.

29. Czy ideał $(x-1, y+3)$ w $\mathbb{Z}[x, y]$ jest główny? Maksymalny? A ten sam ideał w $\mathbb{R}[x, y]$?

30. Dla każdego z następujących ideałów pierścienia $\mathbb{Z}[x]$ zbadać czy jest pierwszy, czy maksymalny i opisać pierścień ilorazowy.

(a) $I_1 = (x)$, (b) $I_2 = (x + 4)$, (c) $I_3 = (3x)$, (d) $I_4 = (3x + 1)$, (e) $I_5 = (x^2 + 3)$.