1. Wyznaczyć metodą eliminacji Gaussa rozwiązania ogólne układów

(a) $5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4$
$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2$

(b) $-9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3$
$-6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2$
$-3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1$

(c) $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7$
$-4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$
$-5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 10x_4 = 3.$

W każdym przypadku znaleźć po dwa szczególne rozwiązania i sprawdzić poprawność rachunków podstawiając te rozwiązania do odpowiednich układów.

2. Rozwiązać układ

$$x + y + z = 1$$
$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + 3y + 4z = 2$$
$$3x + 2y + z = 3$$

Czy istnieje rozwiązanie (x, y, z) tego układu spełniające warunek $y = x^2$?.

3. Rozwiązać układy metodą Cramera.

(a) $2x + y + z = 1$
$x - y - 2z = 3$
$x + y + 3z = 10$

(b) $x + 2y - 3z = -3$
$4x - 3y - z = -1$
$-x - y + z = 0$

4. Wyznaczyć wszystkie wartości $x \in R$, dla których macierz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & x+2 \end{pmatrix}$ jest odwracalna (tzn. ma macierz odwrotną). Następnie dla $x = -2$ znaleźć macierz odwrotną.

5. Stosując wzory Cramera wyznaczyć niewiadomą y z układu

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z + 3t &= 3 \\ 3y \quad + t &= 1 \\ 5x - 2y \quad + t &= 1 \\ 4x - 5y \quad + 2t &= 1 \end{aligned}$$

6. Znaleźć macierz transponowaną do macierzy B , jeżeli

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Znaleźć macierz A spełniającą równanie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Wsk. Pomnożyć obie strony z lewej strony przez macierz odwrotną do $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Rozwiązać w zależności od parametru λ układ równań

(a) $x + 2y - z = 1$
$x + \lambda y + z = 1$
$\lambda + 3y + 3z = 0$

9. Dane są macierze $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Które z iloczynów $ABA,\ B^{-1}A^TA,\ B^2A,\ AA^TB^{-1},\ B^{-1}AB^T$ istnieją?

(b) Obliczyć te z iloczynów , które istnieją.

10. Dla jakich wartości parametru p , układ równań

$$px + 2y + 2z = 10$$

$$x + py + z = 4$$

$$x + y + z = 6$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Odpowiedzi

1. (a) $(2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{9}{4}, -\frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4, x_3, x_4)$,
(b) $(\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{24}x_4 - \frac{1}{3}, x_2, -\frac{11}{8}x_4, x_4)$
(c) układ sprzeczny.

2. Rozwiązanie ogólne $(z-1, -2z, z)$. Ma być $-2z = (z-1)^2$. Stąd $z^2 + 1 = 0$; Odp. nie istnieje.

3. (a) $\det A = -5, \det A_x = -17, \det A_y = 60, \det A_z = -31.$Rozwiązanie $(\frac{17}{5}, \frac{-60}{5}, \frac{31}{5})$.
(b) $\det A = 11, \det A_x = 11, \det A_y = 11, \det A_z = 22$. Rozwiązanie (1,1,2).

4. $\det A = x(x+1)$. A^{-1} istnieje dla $x \neq 0$ i $x \neq -1$. Dla $x = -2$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5. $\det A = -70, \det A_y = -10,\ y = \frac{1}{7}$.

6. $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Dla $\lambda = 1$ rozwiązanie (1-3z,2z,z). Dla $\lambda = 0$ układ sprzeczny. Dla $\lambda \neq 0, 1$ układ ma jednoznaczne rozwiązanie $(\frac{-3}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1}, \frac{2-\lambda}{\lambda-1})$.

9. $B^2A = \begin{bmatrix} -21 & -12 & -8 \\ -27 & -44 & 4 \end{bmatrix}$, $AA^TB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-58}{10} & \frac{-28}{10} \\ \frac{23}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$.

10. Dla $p \neq 1$ i $p \neq -\frac{1}{2}$.