

1. Znaleźć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji. Znaleźć punkty przegięcia.

(1)  $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 20$ , (2)  $f(x) = x^3 + 2x + 21$ ,

(3)  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ , (4)  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ,

(5)  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , (6)  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ,

(7)  $f(x) = x - \sqrt{x}$ , (8)  $f(x) = x^2e^{-x}$ , (9)  $f(x) = x - \ln x$ ,

(10)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ , (11)  $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ .

2. Znaleźć asymptoty.

(1)  $f(x) = \frac{6x}{x^2+2x+4}$ , (2)  $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$ , (3)  $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$ ,

(4)  $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+x+1}$ , (5)  $f(x) = 2x + \frac{\ln(x+1)}{x}$ , (6)  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ .

Odpowiedzi.

1.

(1)  $f''(x) = 6x + 24$ , wyp. w  $(-4, +\infty)$ , wkl. w  $(-\infty, -4)$ , p.p. -4.

(2)  $f''(x) = 6x$ , wyp. w  $(0, +\infty)$ , wkl. w  $-\infty, 0$ , p.p. 0.

(3)  $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$ , wyp. w  $(0, \frac{6-\sqrt{12}}{4})$ ,  $(\frac{6+\sqrt{12}}{4}, +\infty)$ , wkl. w  $(-\infty, 0)$ ,  $(\frac{6-\sqrt{12}}{4}, \frac{6+\sqrt{12}}{4})$ ; p.p. 0,  $\frac{6-\sqrt{12}}{4}$ ,  $\frac{6+\sqrt{12}}{4}$ .

(4)  $f''(x) = \frac{8}{x^3}$ , wyp. w  $(0, +\infty)$ , wkl. w  $(-\infty, 0)$ ; nie ma p.p. () nie należy do dziedziny).

(5)  $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$ , wyp. w  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ ; brak p.p.

(6)  $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^4}$ , wyp. w  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, +\infty)$ , wkl. w  $(-\infty, -\sqrt{3})$ ,  $(0, \sqrt{3})$ ; p.p. 0,  $-\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$ .

(7)  $f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ , wyp. w  $(0, +\infty)$ ; brak p.p.

(8)  $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$ , wyp. w  $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ ,  $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$ , wkl. w  $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ ; p.p.  $2 - \sqrt{2}$ ,  $2 + \sqrt{2}$ .

(9)  $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ , wyp. w  $(0, +\infty)$ ; brak p.p.

(10)  $f''(x) = \frac{-\ln^2 x + 2 \ln x}{x \ln^4 x}$ , wyp. w  $(1, e^2)$ , wkl. w  $(0, 1)$ ,  $(e^2, +\infty)$ ; p.p. 1,  $e^2$ .

(11)  $f''(x) = \frac{6x}{(1+x)^4}$ , wyp.w  $(0, +\infty)$ , wkl. w  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ; p.p 0.

2.

(1) Prosta  $y = 0$  jest asymptotą poziomą w  $+\infty$  i w  $-\infty$ .

(2) Prosta  $y = 1$  jest asymptotą poziomą w  $+\infty$  i w  $-\infty$ .

(3) Prosta  $y = 0$  jest asymptotą poziomą w  $+\infty$  i w  $-\infty$ . Prosta  $x = 1$  jest asymptotą pionową obustronną.

(4) Prosta  $y = x - 1$  jest asymptotą ukośną w  $+\infty$  i w  $-\infty$ .

(5) Prosta  $x = -1$  jest asymptotą pionową prawostronną .

(6) Prosta  $x = 0$  jest asymptotą pionową obustronną, Prosta  $y = 1$  jest asymptotą poziomą w  $+\infty$  i w  $-\infty$ .