1. Wyznaczyć rozwiązania ogólne , jeżeli wiadomo, że wskazane funkcje tworzą ich układy fundamentalne.

(a) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$.

(b) $y'' \operatorname{ctg} x + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = \cos^2 x$, $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = x\cos x$.

(c) $x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{42}{x^4}$, $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$.

2. Rozwiązać metodą uzmienniania stałych.

(a) $2y'' + 4y' - 6y = 3$.

(b) $y'' + y' - 2y = x^2$.

(c) $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$.

(d) $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

(e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

(f) $y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}$.

3. Rozwiązać metodą przewidywania.

(a) $y'' + y = x + 1$.

(b) $y'' + 2y' + 1 = x^2 - x$.

(c) $y'' + 4y = x^4 - x^2 + 3$.

(d) $2y'' - 3y' = x^2 + 1$.

(e) $y'' + y' = 4x^3 - 3x^2$.

4. Rozwiązać metodą przewidywania.

(a) $y'' + y' - 2y = e^{-x}$.

(b) $2y'' - 5y' + 2y = 2(x+2)e^x$.

(c) $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{1}{2}x}$.

(d) $y'' + y' - 2y = e^x$.

(e) $y'' + 2y' + y = (x+1)e^{-x}$.

(f) $y'' - 2y' = (x^2 + x + 1)e^{-2x}$.

(g) $y'' + 4y = (x^3 - x^2)e^{2x}$.

5. Rozwiązać metodą przewidywania.

(a) $y'' + y' - 2y = \cos x + 2\sin x$.

(b) $y'' + 2y' + y = 4\cos 2x$.

(c) $4y'' + 9y = -2\sin 3x$.

(d) $y'' + y = \sin x$.

(e) $y'' + 4y = \cos 2x$.

(f) $9y'' + y = \cos\frac{x}{3} - 2\sin\frac{x}{3}$.

6. Rozwiązać rozbijając na dwa równania.

(a) $y'' - 2y' + y = 2 + \sin x$.

(b) $y'' + 2y' = 2x + \sin x$.

(c) $y'' + 5y' + 6y = \cos x + 6e^{-2x}$.

(d) $y'' - 2y' = x(1 + e^{2x})$.

(e) $y'' - 2y' + 5y = 10\sin x + 17\sin 2x$.

(f) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x} + (36x^2 - 12x - 10)e^{4x}$.

Odpowiedzi.

1.

(a) $y = C_1x + C_2e^x - (x^2 + x + 1)$.

(b) $y = (C_1 + C_2x)\cos x - \sin x\cos x$.

(c) $y = C_1x^2 + C_2x^3 + \frac{1}{x^4}$.

2.

(a) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x - \frac{1}{2}$.

(b) $C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 3)$.

(c) $C_1 + C_2e^x + (x - \ln(e^x + 1))e^x - \ln(e^x + 1)$.

(d) $C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln|\frac{1+\sin x}{\cos x}|$.

(e) $[C_1 + C_2x + \frac{3}{4}x^2(2\ln x + 1)]e^{-2x}$.

(f) $C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| - 1$.

3. (a) $C_1\cos x + C_2\sin x + x - 1$.

(b) $e^{-x}(C_1 + C_2x) + x^2 - 5x + 8$.

(c) $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 0.25x^4 - x^2 + 1.25$.

(d) $C_1 + C_2e^{1.5x} - \frac{x^3}{9} - \frac{2x^2}{9} - \frac{18}{27}$.

(e) $C_1 + C_2e{-}x + x^4 - 5x^3 + 15xx^2 - 30x$.

4. (a) $C_1e^xC_2e^{-x} - \frac{e^{-x}}{2}$.

(b) $C_1e^{2x} + C_2e^{0.5x} - 2xe^x$.

(c) $e^{0.5x}(C_1 + C_2x + \frac{x^2}{8})$.

(d) $C_1e^x + C_2e^{-2x} + \frac{x}{3}e^x$.

(e) $(C_1 + C_2x + \frac{x^3+3x^2}{6})e^{-x}$.

(f) $C_1e^{2x} + C_2 + \frac{1}{64}(8x^2 + 20x + 21)e^{-2x}$.

(g) $C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{4x^3-10x^2+7x-1}{32}e^{2x}$.

5. (a) $C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

(b) $e^{-x}(C_1 + C_2x) - \frac{1}{25}(16 \sin 2x - 12 \cos 2x)$.

(c) $C_1 \cos \frac{3x}{2} + C_2 \sin \frac{32x}{2} - \frac{2}{9} \sin 3x$.

(d) $C - 1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$.

(e) $C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4} \sin x$.

(f) $C_1 \cos \frac{x}{3} + C_2 \sin \frac{x}{3} + \frac{x}{6}(3 \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3})$.

6. (a) $C_1e^x + C_2xe^x + 2 + \frac{1}{2} \cos x$.

(b) $C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x + x + \sin x$.

(c) $C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + 6xe^{-2x} + \frac{1}{10}(\cos x + \sin x)$.

(d) $C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x) + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^{2x}$.

(e) $e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos x + 2 \sin x + 4 \cos 2x + \sin 2x$.

(f) $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + x^2e^{-2x} + (x^2 - x)e^{4x}$.