

WYKŁAD 3.

LINIOWE RÓWNANIE TRANSPORTU.

$$(3.1) \quad u_t + \underline{\alpha}^T \nabla u = 0$$

Tutaj:

- $u = u(t, \underline{x})$
- $t \in [0, T]$, czas
- $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \Omega \subset \mathbf{R}^m$ punkt przestrzeni
- $\underline{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T \in \mathcal{A} \subset \mathbf{R}^m$ zbiór predkości
- $\nabla u = \text{gradu} = [u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_m}]^T$

Równanie wymaga określenia warunków początkowych $u(0, \underline{x}) = \phi(\underline{x})$ i pewnych warunków brzegowych, które zależą od $\underline{\alpha}$.

Najpierw zajmiemy się przypadkiem jednowymiarowym $m = 1$:

$$(3.2) \quad u_t(t, x) + \alpha u_x(t, x) = 0.$$

Przyjmujemy: $t \in [0, T]$, $x \in \Omega = [0, L]$, $\alpha \in [AL, AR]$. Przedział $[AL, AR]$ zwykle zawiera 0. Zakładamy, że wszystkie funkcje są tak regularne, jak tego będziemy potrzebowali.

Zauważmy od razu, że

$$(3.3) \quad u(t, x) = \phi(x - \alpha t);$$

istotnie przy takiej definicji u , $u_t(t, x) = -\alpha \phi'(x - \alpha t)$, oraz $u_x(t, x) = \phi'(x - \alpha t)$, a więc u spełnia równanie (3.2).

Nasuwa się pytanie: po co rozpatrywać takie trywialne zagadnienie, skoro rozwiązanie możemy od razu znaleźć znając warunek początkowy?

Są co najmniej dwa powody:

- na ogół nie dysponujemy wzorem określającym ϕ ; a nawet, gdybyśmy znali taki wzór to często użycie go mogłoby okazać się być trudniejsze od numerycznej realizacji tego wzoru
- To równanie jest często częścią składową większego, złożonego problemu. Trzeba sposób jego przybliżonego rozwiązania dostosować do przyjętego sposobu aproksymacji zastosowanej przy rozwiązywaniu całego zadania
- Jeśli w realizacji całego problemu została użyta *metoda time splitting* (patrz dalsze wykłady), to odwoływanie się do postaci wielowymiarowej może być nie potrzebne.

Interpretacja geometryczna wzoru (3.3) wyjaśnia, dlaczego równanie (3.1) nazywa się **równaniem transportu**. Z biegiem czasu, (gdy t rośnie), wykres waunku początkowego ϕ przesuwa się o αt , w prawo, gdy $\alpha > 0$ w lewo, gdy $\alpha < 0$: wszystko stoi, gdy $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha > 0: & \mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{P} \\ \alpha < 0: & \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{L} \end{aligned}$$

Równanie (3.2) rozpatrujemy w prostokącie $[0, L] \times [0, T]$



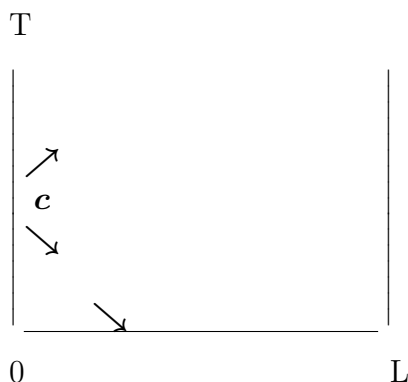
Aby, przynajmniej w przypadku jednowymiarowym, zorientować się jak wygląda sprawa **warunków brzegowych** stawianych dla punktów brzegu, znajdziemy dla równania (3.2) funkcję $t = t(x)$, taką że:

$$v(x) = u(t(x), x) \equiv \text{constans}$$

Łatwo policzyć:

$$t(x) = \frac{x}{\alpha} + c.$$

Otrzymaliśmy tak zwane krzywe charakterystyczne naszego równania (3.2). W tym przypadku jest to rodzina prostych równoległych, przechodzących przez punkt $t = c \geq 0$ na (pionowej!) osi czasu t . Funkcje $t(x)$ są rosnące, gdy $\alpha > 0$, malejące gdy $\alpha < 0$.



Rysunek powyżej przedstawia obie sytuacje: $\alpha > 0$ i $\alpha < 0$. Widać, że jeśli $\alpha < 0$, to nie można dla $x = 0$ (lewy brzeg prostokąta) w punkcie $t = c$ postawić dowolnego warunku brzegowego, ponieważ może to doprowadzić do sprzeczności z warunkiem początkowym postawionym dla $t = 0$. Takiej sytuacji nie ma, gdy $\alpha > 0$. Analogicznie, lecz odwrotnie, gdy chodzi o warunek brzegowy po stronie prawej.

Wniosek stąd taki, że dla $\alpha \geq 0$ warunek brzegowy stawiamy po lewej stronie, pozostawiając prawą stronę "otwartą". Odwrotnie dla $\alpha < 0$.

SCHEMAT BOX (Przykład aproksymacji różnicowej.)

Prostokąt $[0, L] \times [0, T]$ pokrywamy siatką prostokątną o kroku h na osi x , i kroku τ na osi t : $\{t_n, x_k\}$, $t_n = n\tau$, $x_k = kh$. Na tej siatce utworzymy funkcję siatkową $\{u_k^n\}$, wszystko dla $k = 0, 1, \dots, M$ i $n = 0, 1, \dots, N$. Teraz na tej siatce zbudujemy schemat różnicowy dla równania:

$$(3.2) \quad u_t(t, x) + \alpha u_x(t, x) = 0.$$

Najpierw całkujemy po 'oczku siatki', to jest po prostokącie

$$[x_k, x_{k+1}] \times [t_n, t_{n+1}] :$$

$$(3.3) \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t dt dx + \alpha \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u_x dx dt = 0$$

i stąd

$$(3.4) \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} [u(t_{n+1}, x) - u(t_n, x)] dx + \\ + \alpha \int_{t_n}^{t_{n+1}} [u(t, x_{k+1}) - u(t, x_k)] dt = 0$$

Teraz równanie różnicowo-całkowe (3.4) aproksymujemy, zastępując całki kwadraturami trapezów. Otrzymamy schemat różnicowy

$$\frac{h}{2} [(u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}) - (u_k^n + u_{k+1}^n)] + \frac{\alpha\tau}{2} [(u_{k+1}^n + u_{k+1}^{n+1}) - (u_k^n + u_k^{n+1})] = 0$$

Oznaczmy jeszcze:

$$\lambda = \frac{\tau}{h}.$$

Ponieważ równanie (3.2) jest hiperboliczne¹, liczbę λ przyjmiemy jako stały parametr schematu. Teraz po podzieleniu stronami przez $\frac{h}{2}$ i uporządkowaniu, nasz schemat zapiszemy tak:

$$(3.5) \quad au_{k+1}^{n+1} + bu_k^{n+1} = bu_{k+1}^n + au_k^n, \quad a = 1 + \lambda\alpha, \quad b = 1 - \lambda\alpha.$$

UWAGI

- Wartości zmiennych u_k^n traktujemy jako znane. Z równania (3.5) wyliczamy zmienne u_k^{n+1} . Gdy $\alpha > 0$ poza warunkiem początkowym u_k^0 , $k = 0, 1, \dots, M$ musimy zadać warunek brzegowy po lewej stronie, u_0^n , $n = 0, 1, \dots, N$. Wyliczanie z równania (3.5) zaczynamy od u_{k+1}^{n+1} . Gdy $\alpha < 0$ musimy zadać warunek brzegowy po prawej stronie.
- Warto zauważyć, że wyliczanie "n+1-szej linii czasowej u_k^{n+1} " sprowadza się zawsze do podstawiania do wzoru od lewej do prawej, lub od prawej do lewej (gdy $\alpha < 0$). W ten sposób nasz schemat zachowuje się jak schemat otwarty (explicit), mimo że jest schematem zamkniętym.

¹tę sprawę wyjaśnimy dalej

- Wiedząc, że kwadratura trapezów jest rzędu 2, możnaby oczekiwać, że nasz schemat będzie również rzędu 2 (patrz wykład 2). Jednak "wyciśnięcie" z tego schematu pełnego rzędu, wymaga tego, aby wynik na każdym kroku był pobierany ze środka "oczka siatki", co nie zawsze jest wygodne. Zwykle wynik pobiera się z prawego lub lewego górnego rogu.

BADANIE RZĘDU SCHEMATU

Proponuję zrobienie dwóch zadań. Badanie rzędu nie jest napewno rozkoszą. Ale chyba trzeba coś takiego przynajmniej raz przeżyć (?).

ZADANIE 1. Zakładając, że rozwiązanie $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ równania (3.2) jest przynajmniej klasy \mathbf{C}^2 względem każdej ze zmiennych \mathbf{t} i \mathbf{x} , znajdź rząd schematu **BOX**, gdy $\alpha > 0$, a wynik pobieramy z górnego prawego rogu oczka siatki.

ZADANIE 2. (troszke trudniejsze) Przy założeniu, że rozwiązanie $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ równania (3.2) jest przynajmniej klasy \mathbf{C}^3 względem obu zmiennych, udowodnij, że schemat **BOX** jest rzędu 2, jeśli wynik pobieramy ze środka oczka siatki.

PRÓBA STABILNOŚCI

To co tutaj zaproponuję jest próbą "na nie". To znaczy, że jeśli wynik będzie negatywny, to schemat napewno można wyrzucić do śmietnika.

Wstawiamy do równania schematu w punktach siatki funkcję

$$(3.6) \quad \mathbf{u}_k^n = \gamma^n e^{-isk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots, N,$$

gdzie s jest dowolną liczbą rzeczywistą. Następnie wyliczamy z otrzymanego równania γ . Na ogół będzie to liczba zespolona. Jeśli okaże się, że dla pewnej liczby $C \geq 0$

$$(3.7) \quad |\gamma| \leq 1 + C\tau,$$

gdzie τ jest krokiem czasowym schematu, to schemat można zaakceptować. W przeciwnym razie napewno trzeba go odrzucić. Nasuwa się naturalne pytanie:

CO TO WSZYSTKO ZNACZY?

Wyrażenie, które wstawiliśmy do równania schematu $\mathbf{u}_k^n = \gamma e^{-isk}$ jest dla odpowiednio dobranego \mathbf{s} wyrazem rozwinięcia fourierowskiego dość dowolnej funkcji zależnej od $\mathbf{x}_k = \mathbf{h}k$ oraz od $t_n = \tau n$. Gdy wstawimy (3.6) do równania schematu i wyliczymy γ , (3.6) stanie się wyrazem rozwinięcia dość ogólnego rozwiązania równania schematu. Warunkiem początkowym jest e^{-isk} (jest to z kolei wyraz rozwinięcia znów dość dowolnej funkcji siatkowej nie zależnej od n), zaś sposób zachowania się w czasie całego rozwiązania określa γ^n .

Jeśli spełniony jest warunek (3.7), to

$$(3.8) \quad |\gamma|^n \leq (1 + C\tau)^n \leq e^{C\tau n} \leq e^{CT},$$

ponieważ $\tau = \frac{T}{N}$, $n = 0, 1, \dots, N$. Stąd wynika, że

$$|\mathbf{u}_k^n| \leq e^{CT} |e^{-sk}|.$$

Wynika stąd stabilność schematu względem warunku początkowego (np. liczoną na siatce normą $\|\cdot\|_2$) ważnej klasy rozwiązań.