Informatyczny kącik olimpijski (??): Kliki

Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$. *Kliką* nazwiemy taki podzbiór wierzchołków $S \subseteq V$, że każde dwa wierzchołki w zbiorze S są połączone krawędzią w grafie G. Problem znalezienia w grafie kliki o jak największej liczbie wierzchołków jest NP-zupełny, a jak wiadomo, dla takich problemów nikt jeszcze nie pokazał algorytmu wielomianowego. Podobne trudności są z algorytmem dla problemu *zliczania klik* w grafie, choć tutaj stosowną klasę złożoności stanowią tzw. problemy #P-zupełne.

Nic więc dziwnego, że gdy takie właśnie zadanie pojawiło się na obozie w Petrozawodzku w 2009 r. (zadanie pt. *Work for Robots*), nie oczekiwano od zawodników rozwiązania wielomianowego. Występujące w zadaniu ograniczenie $|V| \leqslant 50$ wymagało jednak zastosowania nietrywialnego algorytmu wykładniczego.

Niech $V = \{1, \ldots, n\}$. Nasz algorytm będzie wykonywał różne operacje na podzbiorach zbioru V. Podzbiory takie będziemy reprezentowali jako maski bitowe o długości n (ponieważ $n \leqslant 50$, każda taka maska zmieści się w 64-bitowej zmiennej całkowitej). W pseudokodach będziemy zapisywać operacje sumy, iloczynu i różnicy zbiorów przy użyciu standardowej symboliki matematycznej, ale implementując program, można je równie prosto zapisać przy użyciu operacji bitowych (patrz *Delta* 11/2008). Niech $adj[v]$ oznacza zbiór wierzchołków, z którymi połączony jest wierzchołek v. Przez $ile[S]$ oznaczamy liczbę klik, które są zawarte w podzbiorze S (wynikiem programu będzie $ile[V]$). Dla $S = \emptyset$ mamy dokładnie jedną taką klikę (pustą). Załóżmy zatem, że $S = \{v\} \cup S'$ dla pewnego wierzchołka v. Każda klika zawarta w S jest albo całkowicie zawarta w S', albo zawiera wierzchołek v i jest zawarta w $(S' \cap adj[v]) \cup \{v\}$. Poniższy pseudokod pokazuje, jak wypełniać tablicę ile:

Zwróćmy uwagę, że kolejność przeglądania podzbiorów w pętli jest istotna, tzn. jeśli $S' \subset S$, to S' powinien zostać rozpatrzony przed S. Szczęśliwie się składa, że przy reprezentacji za pomocą masek bitowych przeglądanie w kolejności rosnących liczb (od 1 do $2^n - 1$) ma tę własność.

Element v można wyznaczyć, znajdując najmniejszy zapalony bit w masce bitowej. Przykładowo, w języku C++ (kompilatory GCC) służy do tego operacja `__builtin_ctz` (ang. *count trailing zeros*). Jeśli nie mamy dostępu do takiej operacji, możemy zrobić to tak: $m[S] = 1$, jeśli S jest nieparzyste, oraz $m[S] = 1 + m[S/2]$ w przeciwnym wypadku.

```
ile[∅] := 1;
foreach niepusty podzbiór S ⊆ V w kolejności zawierania do
    v := dowolny element z S;
    S' := S \ {v};
    ile[S] := ile[S'] + ile[S' ∩ adj[v]];
```

Powyższe rozwiązanie działa w czasie $O(2^n)$.

Szybsze rozwiązanie uzyskamy następująco. Podzielmy zbiór wierzchołków na dwa możliwie równe podzbiory $A = \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, $B = \{\lfloor n/2 \rfloor + 1, \ldots, n\}$. Na początek wykonajmy powyższy algorytm, ale tylko dla wierzchołków ze zbioru A; zajmie to czas $O(2^{n/2})$. Zbiór $S \subseteq V$ jest kliką dokładnie wtedy, gdy oba zbiory $S \cap A$, $S \cap B$ są klikami oraz istnieją wszystkie krawędzie między nimi. Rozważmy pewien $S_B \subseteq B$, który jest kliką. Oznaczmy

$$neigh[S_B] = \bigcap_{v \in S_B} (adj[v] \cup \{v\}),$$

czyli zbiór tych wierzchołków, które są połączone ze wszystkimi wierzchołkami z S_B. Wówczas klika S, dla której $S \cap B = S_B$, musi spełniać $S \cap A \subseteq neigh[S_B] \cap A$. Ostatecznie wynikiem jest:

$$\sum_{neigh[S_B] \cap S_B = S_B} ile[neigh[S_B] \cap A],$$

przy czym warunek sumy oznacza po prostu, że S_B jest kliką.

To, czego nam teraz potrzeba, to obliczenie $neigh[S_B]$ dla wszystkich $S_B \subseteq B$. Robimy to podobnie jak w przypadku tablicy ile:

```
neigh[∅] := V;
foreach niepusty podzbiór S_B ⊆ B w kolejności zawierania do
    v := dowolny element z S_B;
    neigh[S_B] := neigh[S_B \ {v}] ∩ (adj[v] ∪ {v});
```

Całe rozwiązanie działa w czasie $O(2^{n/2})$. Jako zadanie dla Czytelnika proponujemy przerobić ten algorytm tak, by znajdował najliczniejszą klikę.

Tomasz IDZIASZEK