Problemy 3SUM-trudne w geometrii

Jakub RADOSZEWSKI

Kiedy rozwiązujemy jakiś problem informatyczny, często naszym celem jest podanie jak najefektywniejszego algorytmu. Jednak czasem możemy natknąć się przy tym na „ścianę" – danego problemu nie da się rozwiązać tak efektywnie, jak byśmy tego chcieli. Najpowszechniej znanym przykładem opisanego zjawiska jest klasa problemów NP-zupełnych. O problemach z tej klasy (a należy do niej wiele naturalnych i praktycznych zagadnień) podejrzewa się, że nie da się ich rozwiązać w czasie wielomianowym względem rozmiaru danych wejściowych. Niestety, tylko *podejrzewa się*, a rozstrzygnięcie tej hipotezy (znanej też jako „P $\neq$ NP?") jest obecnie najsłynniejszym otwartym problemem informatyki teoretycznej.

Na szczęście wiele ważnych problemów obliczeniowych umiemy rozwiązywać w czasie wielomianowym. Jednak w praktyce wielomian wielomianowi nierówny – jest przecież istotne, czy dany problem umiemy rozwiązać w czasie $\Theta(n)$, czy też w czasie $\Theta(n^{10})$. Okazuje się, że także w przypadku problemów rozwiązywalnych w czasie wielomianowym (tzw. klasa problemów P) znane są pewne narzędzia pozwalające stwierdzić, że danego problemu *zapewne* nie da się rozwiązać w czasie szybszym niż taki a taki, a jeśli nawet się da, to jest to bardzo trudne.

W tym artykule skupimy naszą uwagę na następującym problemie 3SUMY:

Zad. 1. Jak rozwiązać problem 3SUMY w czasie $O(n^2)$? (albo chociaż w czasie $O(n^2 \log n)$?)

> Dany jest zbiór S złożony z n liczb całkowitych. Czy istnieją elementy $a, b, c \in S$, takie że $a + b + c = 0$?

Wszystkie omawiane w tym artykule problemy mają charakter decyzyjny, tzn. odpowiedzią w każdym z nich jest pojedyncza wartość logiczna. Na potrzeby naszego artykułu przyjmiemy następującą definicję *redukcji* problemu: Powiemy, że problem A można zredukować do problemu B w czasie $O(f(n))$, jeśli dowolną *instancję* (czyli dane wejściowe) problemu A o rozmiarze n można przekształcić w czasie $O(f(n))$ w stałą liczbę instancji problemu B o rozmiarze $O(n)$ tak, żeby na podstawie odpowiedzi dla wyznaczonych instancji problemu B można było udzielić odpowiedzi dla rozważanej instancji problemu A. Będziemy wówczas pisali, że $A \preceq_{f(n)} B$, co oznacza tyle, że problem B jest co najmniej tak trudny jak problem A, gdyż jeśli umiemy w czasie $O(f(n))$ rozwiązać problem B, to umiemy w takim samym czasie rozwiązać problem A. Jeśli $A \preceq_{f(n)} B$ oraz $B \preceq_{f(n)} A$, to będziemy pisali, że $A =_{f(n)} B$.

Zad. 2. W problemie 3SUMY elementy a, b, c mogą się powtarzać. Nie ma to jednak większego znaczenia, gdyż w czasie $O(n \log n)$ można łatwo identyfikować instancje problemu, dla których istnieje rozwiązanie z powtarzającymi się elementami. Jak to zrobić?

Algorytm ten jest opisany w pracy: I. Baran, E.D. Demaine, M. Patrascu, *Subquadratic algorithms for* 3SUM, WADS 2005.

Problemem, który będziemy redukować do innych zagadnień, jest wspomniany już problem 3SUMY. Przez wiele lat znany był algorytm rozwiązujący ten problem w czasie $\Theta(n^2)$ (patrz zad. 1 na marginesie) i uważano, że nie da się go rozwiązać w złożoności mniejszej niż $\Theta(n^2)$. Wprowadzono też klasę problemów 3SUM-*trudnych*, czyli problemów, do których można zredukować problem 3SUMY w czasie $o(n^2)$. Od 2005 roku wiadomo jednak, że problem 3SUMY można rozwiązać *troszeczkę* szybciej, a mianowicie w czasie $O\big(\frac{n^2(\log\log n)^2}{\log^2 n}\big)$. Mimo tego usprawnienia wciąż nie widać nadziei na znalezienie algorytmu rozwiązującego ten problem w czasie *istotnie* lepszym niż $\Theta(n^2)$.

Zad. 3. Udowodnij, że $3\text{SUM} =_n 3\text{SUM}'$, tzn. pokaż, jak wykonać obie redukcje. Przykłady różnych redukcji znajdziesz w dalszej części artykułu.

Będziemy także używać następującego bliźniaczego problemu 3SUM′, który jest równoważny z problemem 3SUMY (tj. $3\text{SUM} =_n 3\text{SUM}'$):

> Dane są trzy zbiory liczb całkowitych A, B, C, zawierające łącznie n elementów. Czy istnieją liczby $a \in A$, $b \in B$ i $c \in C$, takie że $a + b = c$?

Wiele z opisanych dalej problemów pochodzi z (przystępnej i łatwo dostępnej) pracy przeglądowej: J. King, *A survey of* 3SUM-*hard problems*, 2004.

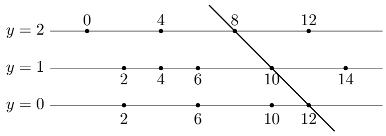
Problemy, które będziemy rozważać w dalszej części tekstu, mają charakter geometryczny. Jako pierwszy rozpatrzymy problem nazywany GEOMBASE – podstawowy problem 3SUM-trudny w geometrii, służący jako narzędzie do dowodzenia 3SUM-trudności innych problemów. Jest on określony następująco:

Punkt kratowy to punkt o całkowitoliczbowych współrzędnych.

> Danych jest n punktów kratowych położonych na prostych $y = 0$, $y = 1$ i $y = 2$. Czy istnieje prosta inna niż pozioma przechodząca

przez jakieś trzy spośród tych punktów?

Po chwili namysłu nietrudno dostrzec tu podobieństwo do problemu 3sum′. Nie jest to przypadek; zachodzi bowiem $3\textsc{sum}' =_n$ GeomBase. Przeprowadzimy tylko redukcję $3\textsc{sum}' \preceq_n$ GeomBase, redukcja w drugą stronę jest właściwie taka sama. Wystarczy mianowicie dla każdej liczby $a \in A$ wybrać punkt $(2a, 0)$ na prostej $y = 0$, dla każdej liczby $b \in B$ – punkt $(2b, 2)$, a dla każdej liczby $c \in C$ – punkt $(c, 1)$, patrz rys. 1. Punkty $(2a, 0)$, $(c, 1)$ i $(2b, 2)$ są współliniowe, gdy



Rys. 1. Instancja problemu GeomBase otrzymana z instancji $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 10, 14\}$ problemu 3sum′. Wynikiem jest $a = 6$, $b = 4$, $c = 10$.

$$c - 2a = 2b - c,$$

czyli dokładnie gdy $c = a + b$. Stąd, odpowiedź dla otrzymanej instancji problemu GeomBase jest pozytywna wtedy i tylko wtedy, gdy pozytywna jest odpowiedź dla odpowiadającej jej instancji problemu 3sum′, a to jest dokładnie to, co chcieliśmy uzyskać.

Problem GeomBase, jakkolwiek użyteczny, nie jest sam w sobie nadmiernie interesujący. Dużo ciekawszy jest podobny do niego, następujący problem 3PointsOnLine:

> Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Czy istnieje prosta przechodząca przez jakieś trzy spośród tych punktów?

W tym miejscu autor pragnie wyrazić swoje zaciekawienie tym, ilu spośród Czytelników próbowało kiedykolwiek rozwiązać ten problem w czasie zbliżonym do $\Theta(n \log n)$ (sam autor wielokrotnie próbował).

Ten problem także jest 3sum-trudny; tym razem redukcję przeprowadzimy wprost z problemu 3sum. Niech S będzie instancją problemu 3sum. Dla każdej liczby $x \in S$ rysujemy na płaszczyźnie punkt (x, x^3). Zbadajmy, kiedy trzy różne tak otrzymane punkty (a, a^3), (b, b^3) i (c, c^3) są współliniowe:

$$\frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{c^3 - b^3}{c - b} \;\Leftrightarrow\; \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{b - a} = \frac{(c-b)(c^2 + bc + b^2)}{c - b} \;\Leftrightarrow$$

$$b^2 + ab + a^2 = c^2 + bc + b^2 \;\Leftrightarrow\; a^2 - c^2 + ab - bc = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$(a - c)(a + c) + b(a - c) = 0 \;\Leftrightarrow\; (a - c)(a + b + c) = 0 \;\Leftrightarrow\; a + b + c = 0.$$

Okazuje się zatem, że punkty (a, a^3), (b, b^3) i (c, c^3) są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c stanowią rozwiązanie problemu 3sumy. W ten sposób otrzymujemy żądaną redukcję problemu 3sumy do problemu 3PointsOnLine, pod warunkiem, że w tym pierwszym problemie interesują nas tylko trójki różnych liczb. To jednak możemy zapewnić (patrz zad. 2).

Głównym zastosowaniem problemu 3PointsOnLine wydaje się weryfikowanie częstego w problemach geometrycznych założenia, że *żadne trzy zadane punkty nie leżą na jednej prostej.*

Wytrawny znawca geometrii natychmiast zauważy, że 3sum-trudność problemu 3PointsOnLine implikuje wprost 3sum-trudność dualnego problemu PointOn3Lines:

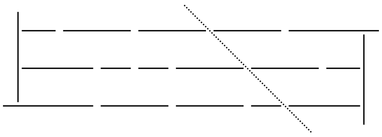
> Na płaszczyźnie danych jest n prostych. Czy któreś trzy proste przecinają się w jednym punkcie?

Zad. 4. Określmy przekształcenie geometryczne T, które punktowi $p = (a, b)$ przyporządkowuje prostą $T(p) : y = ax - b$, a prostej $l : y = kx + d$ przyporządkowuje punkt $T(l) = (k, -d)$. Udowodnij, że punkt p leży na prostej l wtedy i tylko wtedy, gdy prosta $T(p)$ przechodzi przez punkt $T(l)$. (Więcej na temat tej dualności Czytelnik znajdzie w numerze 8/2013 *Delty.*)

Wróćmy teraz do problemu GeomBase. Skoro reklamowaliśmy go jako przydatne narzędzie w geometrii, to najwyższy czas, aby podać kilka jego zastosowań. Wykazaliśmy już, że jest to problem 3sum-trudny. Jeśli zatem pokażemy redukcję z tego problemu do jakiegoś innego problemu geometrycznego działającą w czasie $o(n^2)$, to w ten sposób wykażemy, że ów drugi problem również jest 3sum-trudny. Pierwszym problemem z tej serii, który weźmiemy pod lupę, jest problem Separatora:

> Na płaszczyźnie danych jest n odcinków. Czy istnieje prosta nieprzecinająca żadnego z nich, dzieląca zbiór tych odcinków na dwa niepuste podzbiory? Jeśli chcemy, możemy założyć, że podane odcinki są parami rozłączne.

Sprowadzimy problem GeomBase do problemu Separatora. Tym razem redukcja będzie działać w czasie $O(n \log n)$, gdyż wymagać będzie sortowania. Posortujemy punkty na każdej z prostych poziomych i połączymy pary kolejnych punktów odcinkami w taki sposób, żeby między każdymi dwoma kolejnymi



Rys. 2. Redukcja instancji problemu GeomBase z rys. 1 do instancji problemu Separatora.

odcinkami występował bardzo mały odstęp, o długości równej $\varepsilon > 0$. Widzimy już, że przy tej konstrukcji prosta rozdzielająca zbiór odcinków przechodząca przez trzy odstępy odpowiada trójce punktów współliniowych należących do różnych prostych poziomych. Należy jeszcze zadbać o wyeliminowanie poziomych prostych rozdzielających. Wystarczy w tym celu umieścić dwa pionowe odcinki po bokach konstrukcji i ustawić je „na zakładkę" z odcinkami poziomymi, tak aby z kolei wyeliminować trywialne proste rozdzielające pionowe (rys. 2). W ten sposób wykazaliśmy, że GeomBase $\preceq_{n \log n}$ Separator.

Zad. 5. Jak dobrać ε w opisanej redukcji?

Kolejny przykład. Okazuje się, że problem GeomBase możemy zredukować do następującego, całkiem naturalnego i posiadającego liczne zastosowania praktyczne problemu PlanarMotionPlanning:

> Na płaszczyźnie danych jest n odcinków–przeszkód i jeden odcinek reprezentujący robota. Robot ma się przedostać z zadanej pozycji początkowej do zadanej pozycji końcowej, przemieszczając się jedynie za pomocą ciągłych przesunięć i obrotów. Nie może przy tym dotknąć żadnej z przeszkód. Znów, jeśli chcemy, możemy założyć, że odcinki–przeszkody są parami rozłączne.

Redukcja jest tutaj podobna jak poprzednio. Przeszkodami będą odcinki poziome z wcześniejszej konstrukcji. Robota umieścimy poniżej całej konstrukcji, a jego celem będzie przedostanie się powyżej konstrukcji. Sam robot będzie na tyle długi, żeby nie mógł przedostać się na drugą stronę inaczej niż tylko przez trzy odstępy naraz. Należy jeszcze zadbać, aby robot nie mógł ominąć całej konstrukcji bokiem. W tym celu trzeba poniżej i powyżej konstrukcji zbudować „klatki" uniemożliwiające ucieczkę robota do „nieskończoności". W ten sposób otrzymujemy wniosek, że GeomBase $\preceq_{n \log n}$ PlanarMotionPlanning.

Zad. 6. Jak zbudować klatki w opisanej redukcji? (narysuj!)

To, co przedstawiliśmy do tej pory, to tylko niewielka grupa znanych problemów 3sum-trudnych. Dla Niestrudzonych Czytelników mamy w zanadrzu jeszcze kilka innych takich problemów – tym razem już dowody pominiemy. Zacznijmy od jeszcze jednego pomocniczego problemu 3sum-trudnego SegmentsContainPoints:

> Na prostej danych jest n punktów i $m = O(n)$ parami rozłącznych przedziałów. Czy istnieje wektor, o który można przesunąć wszystkie zadane punkty, tak aby każdy z nich znalazł się w jakimś przedziale?

Redukcje dotyczące problemów SegmentsContainPoints i PolygonContainment są opisane w pracy: G. Barequet, S. Har-Peled, *Polygon-containment and translational min-Hausdorff-distance between segment sets are* 3sum*-hard*, SODA 1999.

Problem ten można zredukować do każdego z następujących zagadnień typu PolygonContainment:

> Na płaszczyźnie dane są dwa wielokąty, odpowiednio o n i $m = O(n)$ bokach. Mamy do dyspozycji pewien zestaw izometrii płaszczyzny. Czy za pomocą tych izometrii możemy pierwszy z tych wielokątów umieścić wewnątrz drugiego, przy założeniu, że:
>
> (a) wielokąty są dowolne i dopuszczamy dowolne przesunięcia;
> (b) wielokąty są wypukłe i dopuszczamy dowolne obroty;
> (c) wielokąty są wypukłe i dopuszczamy dowolne obroty i przesunięcia?

Zad. 7. Opisz redukcję problemu SegmentsContainPoints do problemu PolygonContainment w wersji (a). Redukcja powinna działać w czasie $O(n \log n)$. Wskazówka: szukane wielokąty mają kształt grzebieni.

A już na sam koniec kilka problemów 3sum-trudnych typu Covering:

(a) Czy dany zbiór n dwustronnie nieskończonych pasków (o różnych szerokościach i kierunkach) pokrywa zadany prostokąt?
(b) Czy dany zbiór n trójkątów pokrywa zadany trójkąt?
(c) Oblicz pole sumy danych n trójkątów.
(d) Czy suma danych n trójkątów zawiera jakąś dziurę?
(e) Danych jest n półpłaszczyzn. Czy istnieje punkt płaszczyzny pokryty przez co najmniej k spośród tych półpłaszczyzn?

Zad. 8. Opisz redukcję wariantu (a) problemu Covering do wariantu (b).

Redukcje do problemów typu Covering można znaleźć w podstawowej (tj. pionierskiej) pracy dotyczącej 3sum-trudności: A. Gajentaan, M.H. Overmars, *On a class of $O(n^2)$ problems in computational geometry*, Comp. Geom. 5(3), 1995.